

ФРАКТАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ЕЛОВОЙ ЛАПЫ

С. В. Григорьев ^{a,b*}, О. Д. Шнырков ^{a,b}, К. А. Пшеничный ^a, Е. Г. Яшина ^{a,b}

^a Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»
188300, Гатчина, Ленинградская обл., Россия

^b Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 17 июля 2024 г.,
после переработки 26 августа 2024 г.
Принята к публикации 26 августа 2024 г.

Методом численного фурье-анализа исследованы фрактальные свойства структуры еловой ветви. Изучены изображения еловых лап взрослой 26-летней ели, длиной около 13 м, на различной высоте дерева. Для различных лап, сфотографированных в разных проекциях, наблюдается степенная зависимость спектральной интенсивности $I(q) = Aq^{-N}$, где $N = 2$ в диапазоне импульсов q от 0.07 до 2 см^{-1} . Такой степенной закон определяет характерную структуру еловой лапы, описываемую логарифмическим фракталом в двумерном пространстве в диапазоне размеров от 5 до 100 см. Обнаруженная структура представляет собой распределение хвои на еловой ветви и связана с ее функцией фотосинтеза. Транспортные функции ветви обеспечиваются ветвящейся структурой прутьев, которая описывается классическим фракталом с размерностью $1 < D_f < 2$ в том же диапазоне импульсов от 0.07 до 2 см^{-1} .

DOI: 10.31857/S0044451024120125

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие объекты, встречающиеся в природе, настолько фрагментированы и раздроблены, что точно описать их в рамках классической геометрии невозможно. Для описания таких объектов во второй половине двадцатого века Бенуа Мандельброт ввел термин «фрактал» и построил новую, необычную, «фрактальную геометрию природы» [1]. Предложенная им концепция очень быстро получила распространение и стала применяться в различных областях науки и техники (от радиоэлектроники до медицины) [2–11]. Для фрактальных объектов помимо фрагментированности характерно еще одно свойство — самоподобие. Основной характеристикой фрактальных объектов является фрактальная размерность, которую используют для классификации этих объектов при описании нетривиальных свойств их структуры. Актуальность задач как по изучению фракталов экспериментальными методами, так и по развитию фрактальной теории обусловлена распространенностью объектов с фрактальными свойствами

ми, а также широким полем применения фрактальной концепции. Можно привести множество примеров, когда строение биологических систем или процессы в них можно описать с помощью фрактальной размерности. Фрактальные закономерности внутри живых организмов используют для диагностики заболеваний и прогноза потенциально опасных состояний [11–14].

Одним из самых наглядных, но в то же время и спорных, примеров фрактальной геометрии природы является дерево [15–21]. Современной основой для описания структуры деревьев является теория метаболического масштабирования, которая была предложена в работах Веста и соавторов [22, 23]. Теория, применяемая к растениям, основывается на предпосылке, что транспорт воды является сопутствующим лимитирующим фактором для фотосинтеза. Поскольку транспорт воды является в значительной степени физическим процессом, зависящим частично от структуры транспортной сети, его масштабирование можно предсказать с помощью относительно простых аллометрических моделей, что приводит к предсказанию масштабирования для всех зависимых метаболических процессов. Модель Веста [22, 23] довольно проста по своей

* E-mail: grigoryev_sv@pnpi.nrcki.ru

конструкции. Структура ветвления растения делится на внешние и внутренние компоненты. Внешняя структура следует симметричному и самоподобному ветвлению, что позволяет легко масштабировать структуру. Внешняя структура также соответствует биомеханическим принципам сохранения площади и безопасности от гравитационного выпучивания. Внутренняя структура ветвления представляет собой сеть ксилемных каналов внутри ветвей. Количество и размеры ксилемных каналов связаны простыми правилами с внешней сетью ветвей. Таким образом предполагается, что фрактальная геометрия деревьев является прямым отражением как внутренних, так и пластических, морфологических и физиологических особенностей, которые управляют ростом и выживанием деревьев. Поэтому фрактальная геометрия предоставляет уникальный способ количественного описания структурной сложности крон деревьев — совокупности ветвей и листвы на них. В модели можно предположить, что сосудистые сети деревьев представляют собой «заполняющие пространство» фрактальные сети их ветвей. То есть ветви деревьев подобны фракталам или самоподобны в разных масштабах, причем самоподобие в ветвлении подразумевает, что любая точка ветвления выглядит одинаково независимо от того, наблюдаем ли мы первую или последнюю точку ветвления дерева.

Экспериментально верифицированное описание структуры деревьев с помощью фрактальной концепции до недавнего времени оставалось невыполненным, и лишь в последнее время стали появляться методы, уверенно демонстрирующие фрактальные характеристики деревьев [24–27]. В подавляющем большинстве работ на тему о фрактальных свойствах деревьев исследователи стремились предложить модель (теоретическое построение) древоподобного объекта. Затем делалась попытка определить фрактальную размерность получившегося голема — искусственного построения, претендующего на более или менее качественную симуляцию реального дерева. Естественно, что подобные попытки приводят к результатам, которые лишь приближенно можно ассоциировать с деревьями.

По нашему мнению, осуществление эксперимента с реальными деревьями совершенно необходимо не только для верификации предложенных моделей, но не в последнюю очередь и для экспериментальной подсказки относительно самого предмета исследования: а какую часть дерева считать фрактальной — конфигурацию расположения листьев или структуру ветвления без учета листвы?

Эксперимент также способен прямо указать на наличие фрактальной закономерности, включая пространственные пределы, в которых она наблюдается. И действительно, самоподобие ветвей не сохраняется на всех уровнях иерархии ветвления лиственных деревьев [25,26], а старые ветви и молодые ветви должны рассматриваться отдельно [27]. Критерием деления на молодые и старые ветви может служить наличие/отсутствие листвы на ветвях. То есть молодые ветви являются прямыми участниками фотосинтеза, а старые ветви несут функции транспортной системы в целом организме дерева. Это заметно меняет их структурные характеристики, что и отражается в эксперименте [26,27]. Другими словами, экспериментальные методы определения фрактальной размерности объекта являются ключом для решения задачи описания фрактальных свойств в строении ботанических деревьев.

Существует несколько способов экспериментальной оценки фрактальной размерности деревьев, которые, однако, зависят от модели, описывающей определенные аспекты дерева — лиственный покров, систему ветвления и т. п. [15,19]. Аллометрические модели дают уже количественное описание пространственной и структуры деревьев и связанных с ними метаболических процессов через соотношение масштабирования значимых параметров дерева. Например, в работах [22,23] было показано, что скорость метаболизма B масштабируется с массой дерева M в степени $3/4$ (т. е. $B \sim M^{3/4}$). Это масштабное предсказание можно разбить на два отдельных компонента, которые по отдельности связывают массу и потребление воды с легко измеряемым диаметром ствола D . Эта концепция опирается на образ дерева как симметричный самоподобный объект. При этом остается неустановленной фрактальная размерность такого объекта, видимо, в виду сложности и многокомпонентности всей задачи. В развитие такого подхода в работе [28] было предложено оценивать метрику «доля пути», которая количественно определяет, в какой степени сеть ветвей «реального» дерева отличается от идеальной самоподобной сети. Метрика доля пути P_f определена как отношение среднего пути от комля до края последней ветви к максимальному такому пути. Величина P_f оказывается равной 1, $P_f = 1$, для симметричного самоподобного дерева. Такая конструкция в природе характерна для некоторых сортов дуба или для шаровидной ивы. Дерево оказывается несимметричным, если $P_f = 2/3$ или $P_f = 1/2$, при которых начинает формироваться ствол и дерево по форме напоминает березу. В случае $P_f = 1/3$

ствол доминирует в форме дерева и его по форме можно характеризовать, как ель. Оказалось, что с помощью такой метрики, величина которой колеблется от 0 до 1, можно характеризовать форму дерева. Однако при этом никак не определяется, какая часть дерева является фрактальной, и, конечно, не определяется фрактальная размерность дерева. Более того, такая сеть построена из линейных (путей), а не из объемных элементов, и поэтому так построенное «дерево» оказывается уже обобщенным деревом, далеким от действительности.

Существует способ оценки фрактальной размерности деревьев по методу «двух поверхностей» [29,30], который предполагает, что фрактальная размерность кроны дерева может быть получена из соотношения между общей площадью листьев дерева и площадью поверхности, покрывающей крону. Этот метод оценки можно расширить, а в качестве объема кроны рассматривать объем, занимаемый совместно и листьями, и ветвями [31]. При такой оценке фрактальная размерность принимает значения от 2 до 3, причем размерность, равная 2, означает, что листва распределена по периферии кроны, а поверхность кроны представляет собой классическую плоскую евклидову поверхность. По мере увеличения фрактальной размерности (т.е. при фрактальной размерности большей 2) поверхность кроны становится более фрактальной до тех пор, пока фрактальная размерность не станет равной 3, когда поверхность листвы равномерно распределена в заданном объеме кроны [29,31] (аналог кривой Пеано в трехмерном пространстве). Типичные значения фрактальной размерности при таком измерении составляют величину $D = 2.2 - 2.3$, что указывает на тенденцию расположения листового покрова на периферии кроны дерева [19]. При этом очевидно, что метод, скорее, говорит о фрактальной размерности листовенной массы на дереве и, возможно, опосредовано о молодых ветках, покрытых листьями, но не дает информации о строении всего дерева и структуре его ветвления.

Самым известным способом определения структурной сложности деревьев на основе фрактального анализа является метрика покрытия объема (в 3D-пространстве), занимаемого ветвями дерева, в зависимости от размера ϵ покрывающего элемента. Экспериментально такое измерение можно провести методом лазерного сканирования трехмерной структуры дерева [24,25], а полученная фрактальная размерность в этом случае может меняться от 1 до 3. Подобная техника покрытия применима и для двумерных изображений деревьев [32]. Однако в случае

вечнозеленых лиственных деревьев ветви и ствол оказываются скрытыми листвой и приходится реконструировать фрактальную размерность объекта по фрактальным свойствам границы изображения дерева, т.е. по фрактальным свойствам его поверхности. К недостаткам такого подхода следует отнести то, что он дает оценку фрактальной размерности всего объекта целиком по измерениям только периферийных участков, причем покрытых листвой. Такой подход неприменим для лиственных деревьев, которые имеют более сложную структуру с разными фрактальными размерностями на разных масштабах, как было установлено в [25].

Тем не менее фрактальный анализ применим к изображениям деревьев без листвы (в зимнее время), когда можно сконцентрироваться на закономерностях ветвления дерева, а не его листового покрова [26,27]). Фрактальную структуру объекта в двумерном пространстве можно исследовать по его изображению методом численного фурье-анализа, моделируя тем самым эксперимент по малоугловому рассеянию света на двумерном объекте [33–38]. Этот метод заключается в нахождении и исследовании пространственных характеристик фурье-образа исследуемого изображения [39]. Использование метода численного фурье-анализа показало [26], что боковые проекции лиственных деревьев на масштабах, соответствующих взрослым веткам, являются логарифмическими фракталами, для которых характерен закон равенства площади поверхности на всех уровнях ветвлений взрослых ветвей. Более того, оказалось, что молодые ветки отличаются по своей фрактальной структуре от взрослых [27]. Следует особо подчеркнуть, что причиной наблюдаемых скейлинговых законов фурье-образов именно силуэтов (двумерных проекций) деревьев является квазидвумерная же структура слоя древесины, обеспечивающего водоснабжение дерева и снабжение его питательными веществами.

Хвойные породы деревьев с моноподиальным ветвлением, приводящим к образованию мощного ствола и многочисленных ветвей на нем, гораздо реже становились объектом изучения с помощью фрактального анализа. В этом случае в качестве объекта фрактальной геометрии следует рассматривать единичную ветвь. Отдельный интерес представляет вопрос о том, каково распределение ветвей (идентичных по своей структуре и морфологии) вдоль ствола. Для одиноко стоящей ели предполагается, что ее ветви распределены равномерно вдоль ствола по высоте и равномерно по азимуту вокруг оси ствола. В работах [18, 40, 41] был предложен

метод определения фрактальной размерности лапы ели. Ветвь рассматривалась как объект, построенный из линейных отрезков, и для определения фрактальной размерности оценивалась суммарная длина ветвей на каждом уровне ветвления. Были предложены формулы в виде сходящихся степенных рядов для вычисления суммарной длины ветвей ели в зависимости от уровня ветвления, и проводились последовательные вычисления суммарной длины ветвей при разных масштабах. Фрактальная размерность определялась как тангенс угла наклона прямой, аппроксимирующей зависимость между масштабной единицей измерения и суммарной длиной ветвей в двойном логарифмическом масштабе. Были проведены расчеты, учитывающие динамику роста ветви и отмирания побегов, а также различные уровни освещенности. При этом отмечалось [40], что аналитическое выражение для оценки фрактальной размерности ветки с учетом хвои на ней становится затруднительным. С одной стороны, хвоя вообще не увеличивает фрактальную размерность ветки, а с другой — существенно увеличивает площадь поверхности. Какова роль хвои в общей фрактальной структуре ветви, осталось невыясненным. Во всяком случае, результаты фрактального анализа, полученные в работах [18, 40, 41], базируются на модели одномерной ветви и не учитывают того факта, что ветвь имеет конечную площадь поверхности и конечный объем.

В своей работе мы даем экспериментальную оценку фрактальной размерности ветвей ели по их изображениям. Для измерения фрактальной размерности используется метод численного фурье-анализа изображений. В этом экспериментальном подходе при измерении учитывается площадь поверхности еловой ветви вместе с хвоей. Установлено, что лапы ели, обрамленные хвоей, формируются, подчиняясь закону логарифмического фрактала в двумерном пространстве, т. е. для них выполняется правило сохранения суммарной площади ветвей до и после ветвления.

Следует отметить, что до сих пор не было установлено связи между результатами теории метаболитического масштабирования и экспериментально полученными значениями фрактальной размерности деревьев. В то же время наш подход, по всей видимости, обеспечит результатами, которые такую связь в недалеком будущем установят.

Работа организована следующим образом. В разд. 2 представлено исследование методом численного фурье-анализа изображений ветвей 26-летней ели с различной высоты ствола. В разд. 3 приводят-

ся результаты анализа фрактальной размерности ветвей, обрамленных хвоей. В разд. 4 полученные экспериментальные результаты сравниваются с результатами теоретической модели [18, 40, 41]. В разд. 5 представлены выводы работы.

2. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Еловая лапа представляет собой квазидвумерный объект, основу которого составляет иерархическая моноподиальная система ветвления. От центральной ветви отходит множество вторичных ветвей, которые располагаются в одной плоскости. Эти вторичные ветви дают третичные отростки в этой же плоскости, которые в свою очередь дают свои новые — все в одной плоскости. Такая квазидвумерная конструкция представляется удобным объектом для исследования через ее двумерное изображение — фотографию. При этом информация о структуре ветви не теряется, поскольку отчетливо видны все, даже самые малые, элементы этой структуры. Каждый побег еловой ветви обрамлен плотными рядами хвои, расположенной также в плоскости ветви. Оптический образ еловой ветви в значительной степени составляется из обрамления ветвей хвоей, поэтому еловая ветвь представляет собой совокупность прутьев и хвои как единое целое.

На рис. 1 дано изображение стандартной еловой ветви с небольшим (3–4) количеством ветвлений. Мы используем методику численного фурье-анализа для того, чтобы определить фрактальную размерность объекта в двумерном пространстве по его изображению. Фотография типичной ветви ели представлена на рис. 1 а. Для фурье анализа изображение должно быть как можно более контрастным, а в идеале — бинарным. Для достижения лучшей контрастности изображения фотографировать ветки следует на белом покрывале в пасмурный день, либо в тени при равномерном освещении, чтобы тени и солнечный свет не вносили дополнительные искажения в цвета фотографии. Снимок следует делать с расстояния около 3–4 м так, чтобы вся ветка попала в объектив. Полученные изображения следует обработать с использованием графического редактора так, чтобы сделать их максимально контрастными и черно-белыми. Помимо этого, мягкой кистью следует закрасить все посторонние объекты, попавшие на фотографию (камни, иголки и т. д.).

Контрастное черно-белое изображение той же ветви представлено на рис. 1 б. Затем проводится численное фурье-преобразование изображения дву-

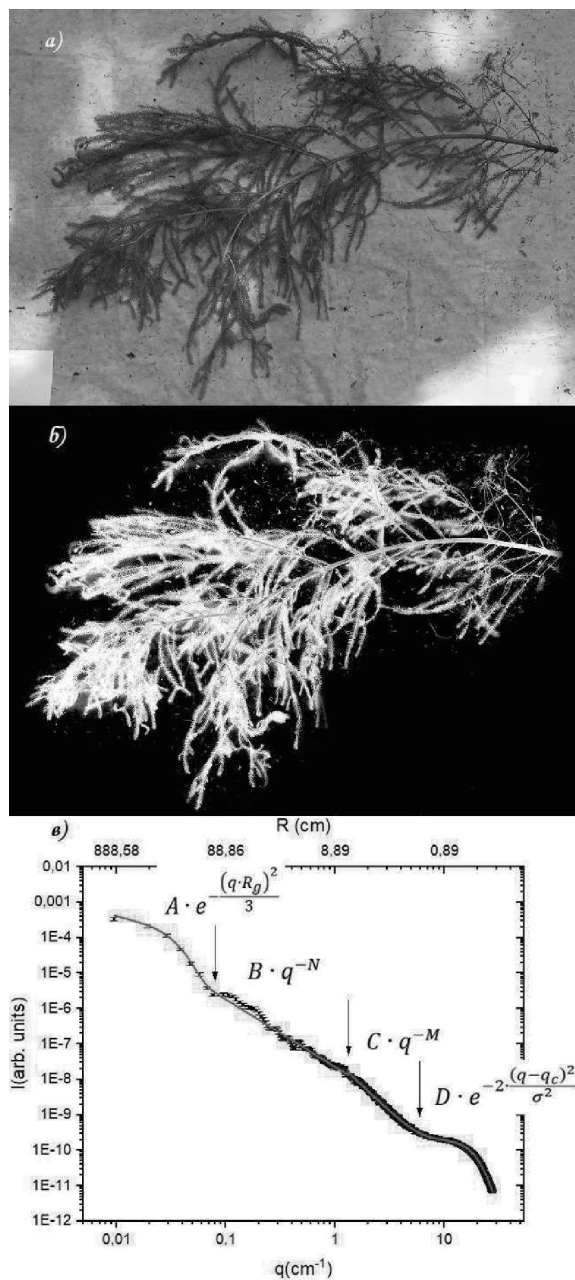


Рис. 1. Типичная ветвь ели (а), контрастное черно-белое изображение (б), зависимость спектральной интенсивности I от переданного импульса q (фурье-зависимость) (в)

мерной черно-белой картины. Модуль полученного фурье-образа возводят в квадрат, азимутально усредняют, получая при этом зависимость спектральной интенсивности I от импульса q (фурье-зависимость) (рис. 1 в). Для реализации этих шагов мы использовали программу fractal [42]. Кривая, полученная при исследовании изображения методами фурье-анализа, имитирует зависимость интенсивности малоуглового рассеяния когерентного

излучения (рентгена, нейтронов, света) от переданного импульса в обратном пространстве (фурье-пространстве), который обратно пропорционально связан с масштабом. Таким образом, полученная кривая характеризует количество вещества в зависимости от масштаба. Более подробное описание этого метода и примеры его применения представлены в работах [34, 39, 43].

Как видно на рис. 1 в, при исследовании фотографий веток ели методом численного фурье-анализа кривую рассеяния можно разделить на четыре участка, каждый из которых демонстрирует свой характер убывания интенсивности с ростом импульса. В области малых импульсов кривая интенсивности описывается функцией Гинье

$$I(q) \propto \exp\left(-\frac{(qR_g)^2}{3}\right)$$

с $R_g = 64 \pm 3$ см в диапазоне переданных импульсов от 0.01 до 0.07 см⁻¹. На втором участке кривая рассеяния в двойном логарифмическом масштабе хорошо аппроксимируется прямой, наклон которой близок к 2, что соответствует структуре логарифмического фрактала [39, 43]. Этот участок кривой описывается зависимостью $I(q) \propto q^{-N}$ с $N = 1.90 \pm 0.03$ в диапазоне импульсов от 0.07 до 1.3 см⁻¹, что соответствует масштабам в реальном пространстве от 6.8 до 111 см. Следующий участок характеризуется ускорением убывания интенсивности. В двойном логарифмическом масштабе кривая интенсивности на этом участке аппроксимируется прямой с наклоном близким к 3. В диапазоне импульсов от 1.3 до 8.5 см⁻¹ (от 1 до 6.8 см в реальном пространстве) кривая рассеяния описывается законом $I(q) \propto q^{-M}$ с $M = 2.95 \pm 0.01$. Этот участок соответствует рассеянию на минимальном элементе фрактала, а точка перехода от второго участка к третьему соотносится с размером минимального элемента фрактала. Эта зависимость по сути не является фрактальной и по величине показателя степени M близкой к 3, и по малому диапазону, в котором она наблюдается. Эта зависимость характеризует ограничение снизу действительно фрактального диапазона с индексом N в области малых q . В области больших переданных импульсов наблюдается характерная особенность — «плечо» интенсивности с резким обрывом при максимальных q . Кривая на этом участке хорошо описывается функцией Гаусса. В диапазоне импульсов от 8.5 см⁻¹ (менее 1 см в реальном пространстве) кривая рассеяния описывается законом

$$I(q) \propto \exp\left(-2\frac{(q - q_c)^2}{\sigma^2}\right)$$

с $q_c = 10.3 \pm 0.1 \text{ см}^{-1}$, что соответствует 0.86 см в реальном пространстве, и $\sigma = 13.1 \pm 1 \text{ см}^{-1}$, что соответствует 0.68 см в реальном пространстве. Эта особенность ассоциируется с рассеянием на отдельных игловках или их парах, тройках — т.е. на корреляциях хвои, обрамляющей ветвь ели. Отметим сразу, что кривая спектральной интенсивности численного фурье-преобразования для любых еловых ветвей выглядит совершенно одинаково и характеризуется участком логарифмического фрактала и корреляционным горбом еловой хвои.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЛАП 26-ЛЕТНЕЙ ЕЛИ МЕТОДАМИ ЧИСЛЕННОГО ФУРЬЕ-АНАЛИЗА

Для демонстрации универсальности степенных законов, характеризующих изображения еловых ветвей, процедура численного фурье анализа была проведена для всех ветвей отдельной ели, выросшей в парке «Орлова роща» г. Гатчины Ленинградской области. Ель, выросшая в густом ельнике, была свалена ветром в мае 2023 года, после чего и проводили исследование. Возраст ели определяли по числу годовых колец на спиле ствола упавшего дерева в 40 см от корня, он составляет 26 лет. Высота дерева равна 13 метрам.

На примере этого дерева мы изучили структуру ветвей, растущих на разной высоте ели. Живую ветвь упавшей ели отделяли от ствола, фиксируя при этом высоту на которой росла ветвь. Затем, изображение (фотографию) этой ветви делали, соблюдая метод и критерии, описанные в предыдущем разделе. Эти фотографии обрабатывали в графическом редакторе, получая черно-белое изображение, и проводили численный фурье-анализ, используя программу fractal [42].

Полученные результаты свидетельствуют, что спектральные кривые веток, взятых с разных высот, имеют одинаковую структуру. Примеры изображений ветвей и их спектральных кривых представлены на рис. 2–4. На первых 325 см ствола ель не имела ветвей.

На рис. 2 представлена кривая интенсивности I от импульса q для ветви ели с высоты 399 см. Зависимость $I(q)$ делили на два участка: участок больших масштабов при $q < 2.1 \text{ см}^{-1}$ и участок малых масштабов при $q > 2.1 \text{ см}^{-1}$. Граничный импульс $q = 2.1 \text{ см}^{-1}$ соответствует 4 см в прямом простран-

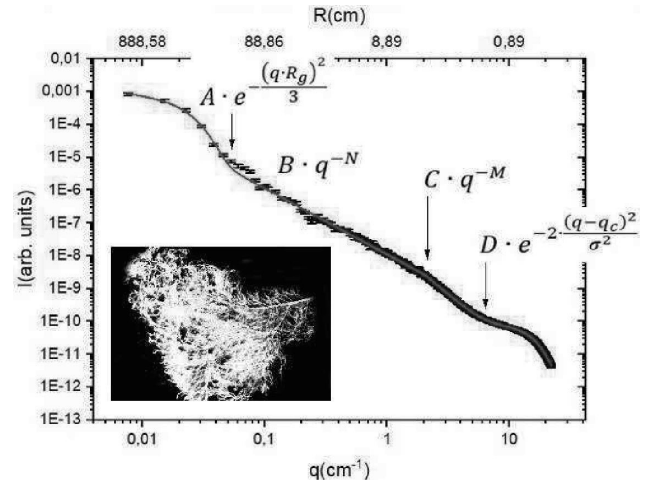


Рис. 2. Спектральная кривая изображения ветви ели с высоты 399 см

стве. Спектральную кривую на больших масштабах (малых q) описывали суммой двух функций:

$$I(q) = A \exp\left(-\frac{(qR_g)^2}{3}\right) + Bq^{-N}. \quad (1)$$

При $q < 0.05 \text{ см}^{-1}$ (177 см в прямом пространстве) преобладает вклад от функции Гинье с радиусом гираций $R_g = 86 \pm 3 \text{ см}$, а при $q > 0.05 \text{ см}^{-1}$ преобладает вклад от степенной функции с показателем степени $N = 2.02 \pm 0.02$. Такая степенная зависимость соответствует логарифмической фрактальной структуре. При $q > 2.1 \text{ см}^{-1}$ (область малых масштабов) кривую интенсивности аппроксимировали суммой функций:

$$I(q) = Cq^{-M} + D \exp\left(-\frac{2(q-q_c)^2}{\sigma^2}\right). \quad (2)$$

Наилучшая сходимость аппроксимации достигалась при $M = 3.2 \pm 0.02$, $q_c = 9.1 \pm 0.1 \text{ см}^{-1}$, $\sigma = 11.0 \pm 0.05$. На качественном уровне ясно, что на участке кривой при $q < 6.2 \text{ см}^{-1}$ (1.4 см в прямом пространстве) доминирует степенная функция, а на участке при $q > 6.2 \text{ см}^{-1}$ преобладает вклад от функции Гаусса. Этот участок кривой рассеяния соответствует парным корреляциям элементов хвои.

На рис. 3 представлена кривая малоуглового рассеяния от ветви ели с высоты 663 см. Как и в предыдущем случае, зависимость разбивали на два участка. При $q < 1.5 \text{ см}^{-1}$ (6 см в прямом пространстве) спектральную кривую описывали функцией (1). Параметры аппроксимации $R_g = 71 \pm 3 \text{ см}$ и $N = 2.05 \pm 0.02$ близки к величинам, полученным в предыдущем случае. Участок кривой при $q > 1.5 \text{ см}^{-1}$ описывали выражением (2)

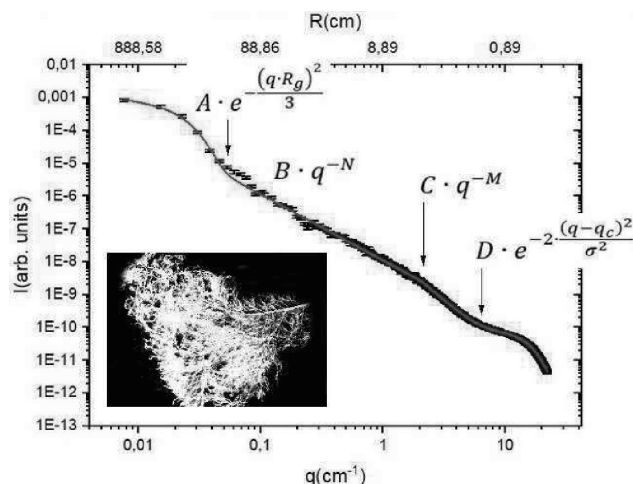


Рис. 3. Кривая малоуглового рассеяния, полученная при исследовании методом численного фурье-анализа ветви ели с высоты 663 см

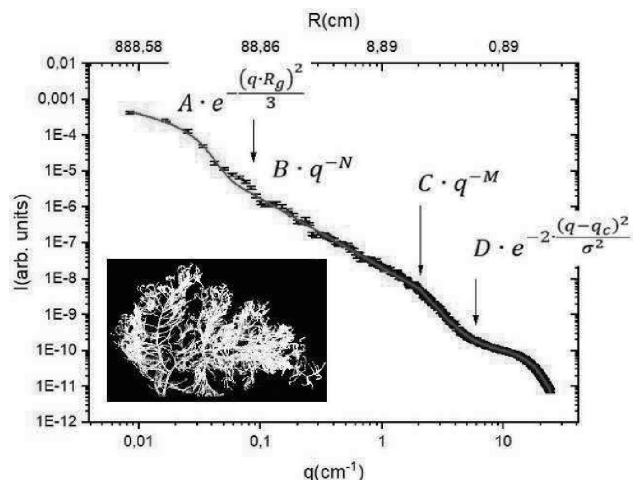


Рис. 4. Кривая малоуглового рассеяния, полученная при исследовании методом численного фурье-анализа ветви ели с высоты 830 см

с характерными параметрами $M = 3.51 \pm 0.01$, $q_c = 9.0 \pm 0.1 \text{ см}^{-1}$, $\sigma = 12.4 \pm 0.2$.

На рис. 4 представлена спектральная кривая для ветви ели с высоты 830 см. Для области больших масштабов (малых q), т. е. при $q < 1.8 \text{ см}^{-1}$, зависимость $I(q)$ описывали функцией (1) с параметрами $R_g = 75 \pm 4 \text{ см}$ и $N = 1.93 \pm 0.02$. Участок зависимости при $q > 1.8 \text{ см}^{-1}$ описывали выражением (2) с характерными параметрами $M = 3.45 \pm 0.02$, $q_c = 6.7 \pm 0.1 \text{ см}^{-1}$, $\sigma = 15.0 \pm 0.1$.

Фурье-анализ изображений ветвей, произрастающих на различной высоте вдоль ствола дерева, демонстрирует схожесть получаемых спектральных кривых. Все они характеризуются диапазоном Ги-

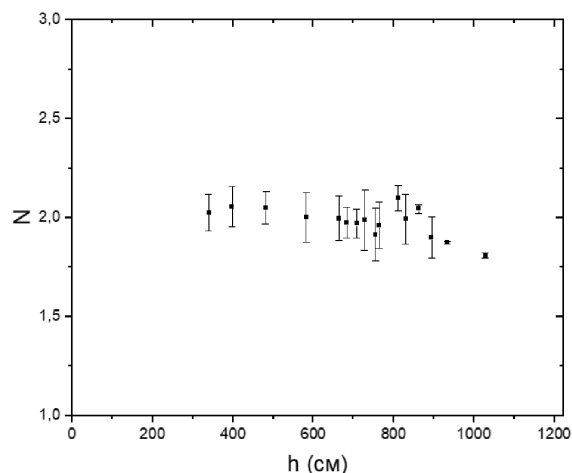


Рис. 5. Зависимость показателя степенной функции N от высоты произрастания ветки h

нье с радиусом гираций $R_g \sim 100 \text{ см}$, широким участком, на котором наблюдается зависимость q^{-N} с $N \approx 2$ и максимумом при $q_c \sim 9 \text{ см}^{-1}$. Величина показателя степени N в зависимости от высоты произрастания ветви представлена на рис. 5. В соответствии с моделью моноподиального ветвления несколько ветвей располагаются на определенной высоте ствола. Так, например, на высоте 330 см, 400 см и 480 см располагалось по 3 ветви. Результаты определения фрактальной размерности усреднялись для каждой из этих высот. Из графика видно, что по всей длине ствола ели показатель N близок к 2. Лишь для веток на верхушке ели показатель уменьшается до величины $\sim 1.8 - 1.9$.

Нет сомнений, что все ветви на определенных масштабах характеризуются одним и тем же законом — степенной зависимостью с показателем N равным 2, т. е. распределение вещества в еловой ветке подчиняется закону логарифмического фрактала. Эта зависимость сверху ограничена величиной R_g . Диапазон, в котором наблюдается эта степенная зависимость, ограничен снизу величиной R_{min} , разделяющей область малых и больших масштабов — точкой перехода от зависимости q^{-N} ($N \approx 2$) к зависимости q^{-M} ($M \approx 3$). На рис. 6 представлены величины R_g и R_{min} , характеризующие диапазон масштабов, на котором наблюдается логарифмический фрактал с $N \approx 2$. Этот диапазон примерно одинаков для всех ветвей вдоль ствола и органичивается снизу 3–4 см, а сверху величиной около 80–100 см. Никакой зависимости этого диапазона от высоты произрастания ветви вдоль ствола ели не наблюдается. Во фрактальной теории логарифмический фрактал характеризуется пробной функцией

следующего вида:

$$\rho(r) = r^2 \left(\log \frac{1}{r} \right)^{D_f}. \quad (3)$$

Размерность этого фрактала равна 2, а величина D_f называется подразмерностью и равна -1 . Для полноты картины на рис. 6 нанесена зависимость параметра $R_c = 2\sqrt{2}\pi/q_c$, характеризующего расстояние между иглками. Оно равно примерно 0.7 см для всех ветвей, изображения которых участвовали в анализе.

Таким образом, все ветви ели характеризуются одной и той же зависимостью, описываемой выражениями (1) и (2) с одними и теми же характерными величинами параметров R_g , R_{min} и R_c .

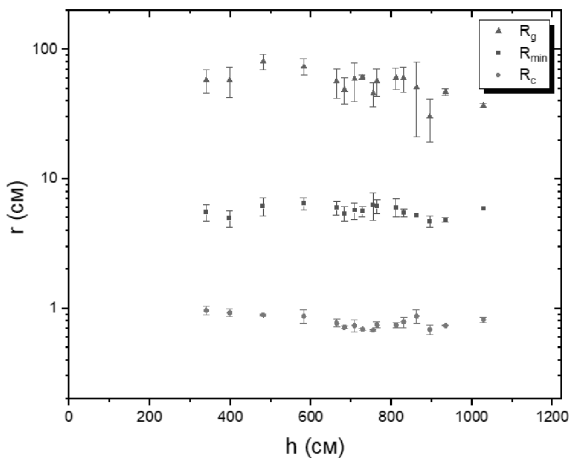


Рис. 6. Зависимости параметров аппроксимации R_g , R_{min} , R_c от высоты произрастания ветки h

Интересно сравнить спектральную кривую для ветви с иглками и для ветви без иголок. На рис. 7 в качестве примера представлена спектральная кривая ветви ели без иголок. Часть кривой при $q < 2.02 \text{ см}^{-1}$ описывается 1, где $R_g = 52 \pm 2 \text{ см}$, а показатель степени $N = 1.37 \pm 0.02$. Эта фрактальная зависимость, ассоциирующаяся с классическим фракталом, заменила логарифмический фрактал, демонстрируя тем самым качественное различие структур ветки с иглками и ветки без иголок. В области малых масштабов, в диапазоне импульсов от 2 до 20 см^{-1} (диапазон масштабов от 0.3 до 3 см) спектральная кривая быстро убывает, характеризуя, по-видимому, совокупность поперечных сечений веток. А участок кривой, соответствующий парным корреляциям иголок, вообще отсутствует.

Важно отметить, что в этой ветви отсутствует структура, соответствующая логарифмическому

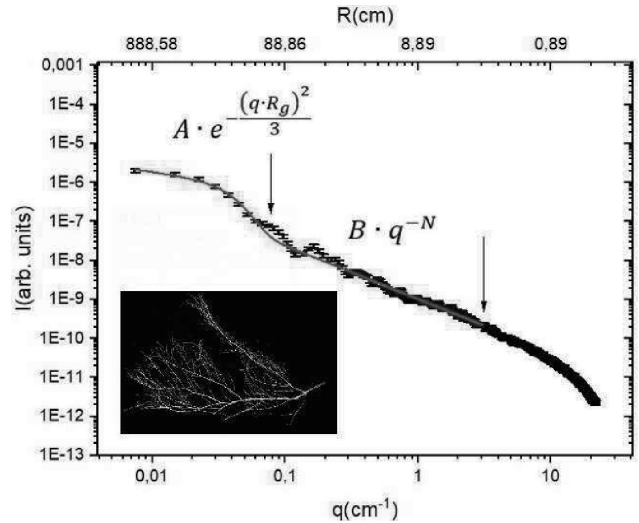


Рис. 7. Спектральная кривая, полученная при исследовании методом численного фурье-анализа ветви ели без иголок

фракталу, т. е. участку, на котором наблюдалась бы зависимость Q^{-2} или близкая к ней. Отсутствует и спектральная особенность, характеризующая корреляции хвои (иголок) при $Q_c \approx 10 \text{ см}^{-1}$. Вместо этого мы наблюдаем фрактальную структуру на основе линейных элементов — отрезков разной длины, заполняющих двумерное пространство. В целом объект выходит за пределы размерности 1 и оказывается объектом с размерностью $1 < D_f < 2$, т. е. подпадает под классификацию классических массовых фракталов в двумерном пространстве. Его пробная функция в теории фракталов описывается степенным выражением:

$$\rho(r) = r^{D_f}. \quad (4)$$

Для того чтобы уверенно установить величину фрактальной размерности ветви без иголок, необходимо провести отдельное, статистически достоверное измерение фрактальности сотен сухих ветвей, лишенных хвои. Это исследование еще не выполнено. Тем не менее уже сейчас можно заключить, что хвоя играет важную роль для дерева (ветки) не только сама по себе, но она является важной частью структуры живой, растущей ветви. Другими словами, ветвь с хвоей на масштабах в диапазоне от 3–4 см до 80–100 см является логарифмической фрактальной структурой (в соответствии с (3)) с плоским единичным элементом r^2 . И в том же диапазоне масштабов ветвь без иголок описывается классическим фракталом с линейным единичным элементом r (в соответствии с (4)). Рассматривая изображения ветвей, интересно отметить качественное различие

иерархии этих двух фракталов: иерархия ветвей по размерам строится от ствола к периферии, а иерархия хвои, наоборот, строится от периферии к стволу.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Экспериментальное исследование фрактальных свойств ветвей ели с помощью численного фурье-анализа их изображений продемонстрировало наличие двух фрактальных структур еловой ветви на масштабах от 3 до 100 см: логарифмического фрактала для расположения иголок на ветви и классического массового фрактала для распределения прутьев, собственно формирующих эту ветвь.

Не задаваясь извечным вопросом о том, какой из двух фракталов первичный, а какой вторичный, отметим, что для вечнозеленых хвойных деревьев ветки обрамлены хвоей, пока они участвуют в жизнедеятельности дерева. При этом именно хвоя играет главную роль в формировании ветки, как логарифмической фрактальной структуры. Распределение живого вещества иголок в пространстве лапы ели оказывается совсем не случайным. Оно подчинено закону квазидвумерной фрактальной конструкции — логарифмического фрактала — так, будто хвоя и есть существенная, определяющая часть этой конструкции. Следует напомнить, что в двумерном случае логарифмический фрактал интерпретируется как закон равенства площади на разных уровнях пространственного масштабирования, что в случае ветки ели выполняется только при учете покрывающей ее хвои. Это не удивительно, если принять во внимание, что именно хвоя, эти «еловые листья», будучи носителем фотосинтеза, служит источником углерода как строительного материала для ветвей и ствола дерева.

С другой стороны, распределение иголок определяется системой ветвления лапы, которое так ясно видно для ветки ели, на которой уже нет иголок. Ветка без иголок характеризуется структурой классического фрактала на плоскости с размерностью $1 < D_f < 2$. Этот закон носит случайный характер и ассоциируется с механизмом формирования «диффузионно-ограниченных агрегатов» (diffusion limited aggregation) [8].

Сочетание случайного характера классического фрактала для ветки с жесткими закономерностями логарифмического для хвои буквально камуфлируется высокой симметрией строения еловой лапы. Высокая симметрия — результат генетики. Ветки и вершина ели ежегодно повторяют одно и то же дей-

ствие моноподиального ветвления, предусмотренного генетическим кодом дерева. Факт ветвления для ели обладает высокой симметрией, но рост новых побегов ограничен наличием ресурса для роста, т. е. количеством света для фотосинтеза в иголках и количеством воды и других полезных компонентов, поступающих по стволу и ветке из корней. То есть факт ветвления — генетический фактор, а расположение ветки, как агломерата иголок, в пространстве — результат процесса жизнедеятельности. Этот результат и описывается законом логарифмического фрактала, который подразумевает оптимальное распределение жизненных ресурсов по ветви.

Сопоставим наши экспериментальные результаты и результаты модельной ели, представленной в работе [18]. Авторы (Гурцев и Цельникер) предложили модель ветви ели, основанную на моноподиальном, т. е. высокосимметричном, ветвлении, и определили ее фрактальную размерность на основании зависимости суммарной длины ветви от масштаба измерения. В случае неограниченного числа ветвлений полученная ими фрактальная размерность была больше 2, не ограничиваясь при этом размерностью пространства, как это должно быть, согласно фрактальной теории. Например, при удлинении ветки в 0.75 раз и коэффициенте ветвления 9 они получили фрактальную размерность 6.64. Такой результат объясняется тем, что ветвь с большими коэффициентами ветвления и удлинения очень быстро начала бы самопересекаться и заполнила бы собой все трехмерное пространство несколько раз. Такой случай невозможен в реальном мире, но математические расчеты, проведенные в статье, не учитывали возможности самопересечений веток. В случае модели с ограниченным коэффициентом ветвления фрактальная размерность, полученная в статье, была меньше 2, при этом чем старше становилась ветвь, тем ближе ее фрактальная размерность приближалась к 2. По всей видимости, в отличие от имитационной модели ветви, которая была рассмотрена в статье [18], реальная ель «подбирает» число ветвлений, коэффициент удлинения, а главное, распределение хвои по ветви таким образом, чтобы соблюдался принцип равенства вещества (хвои) на различных уровнях ветвления. То есть параметры строения ветви определяются законом логарифмического фрактала распределения хвои в квазидвумерном пространстве, формируемым плоскостью еловой лапы.

В итоге закон распределения иголок в плоскости ветви построен так, чтобы выполнялись два правила логарифмического фрактала. Одно из них —

фрактал имеет n генераций, а суммарные площади каждой из генераций, занимаемые иголками в этом объекте, равны [21]

$$d_n^2 = k d_{n+1}^2. \quad (5)$$

Здесь d_i — линейный размер элемента i -й генерации, k — количество разветвлений на каждой итерации. Если количество разветвлений на каждой итерации равно 4, то выражение (5) переписывается в виде $d_n^2 = (2d_{n+1})^2$.

Во фрактальной теории количество итераций бесконечно, но в реальном мире оно ограничено. Поэтому второе условие устанавливает соотношение между максимальным и минимальным размерами фрактала:

$$\frac{R_{max}}{R_{min}} = \frac{n d_0}{d_n} = n 2^n. \quad (6)$$

Здесь R_{max} — линейный размер всего фрактала, R_{min} — линейный размер минимального элемента. Это правило можно переформулировать в более простом виде: средняя плотность логарифмического фрактала n -й генерации в двумерном пространстве равна $\rho_n = 1/n$. В случае исследуемых ветвей ели можно оценить $n \approx 3$, т. е. логарифмическая фрактальная структура имеет 3 генерации. Для модельной ветви с линейным размером около 1 м на ветви обнаруживается 64 пятна размером 3 см, 16 пятен размером 6 см, 4 пятна размером 12 см и 1 пятно размером 24 см. Эти пятна, в свою очередь, сформированы агломератами иголок — хвоей.

Можно грубо оценить плотность хвои на черно-белых рисунках (рис. 2–4) по отношению количества белых пикселей к общей площади рисунка. Это отношение равно $\rho = 0.33$ –0.4, что также дает значение $n = 2.5$ –3.

Можно сделать вывод, что такое распределение иголок в пространстве ветви (логарифмический фрактал), по-видимому, обеспечивает максимально эффективный фотосинтез внутри иголок и возникает как результат процессов жизнедеятельности дерева. Это особенно важно в связи с тем, что до сих пор не было установлено связи между результатами теории метаболического масштабирования [22, 23] и экспериментально полученными значениями фрактальной размерности деревьев. Наш подход обеспечивает прямое измерение фрактальной размерности агломератов иголок и тем самым устанавливает прямую связь между объемами продуктов фотосинтеза одной ветви и ее фрактальной структурой. Можно предположить, что установленное в нашей работе количественное описание строения еловой ветки

позволит перейти к математически обоснованному выводу аллометрических закономерностей и отношений, а также к пониманию базовых процессов, которые создают эти закономерности.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом численного фурье-анализа исследованы фрактальные свойства изображений еловых лап 26-летней ели длиной около 13 м на различной высоте дерева. Для еловых лап, сфотографированных в разных проекциях, наблюдается степенная зависимость спектральной интенсивности, $I(q) = Aq^{-N}$, где $N = 2$ в диапазоне переданных импульсов от 0.07 до 2 см⁻¹, что соответствует масштабу в реальном пространстве от 3 до 80 см. Во-первых, такой степенной закон характеризует масштабную инвариантность структуры объекта исследования, т. е. объект является самоподобным на разных масштабах. Во-вторых, такой степенной закон характеризует ветвящуюся структуру, описываемую логарифмическим фракталом в двумерном пространстве. Показано, что логарифмическая фрактальная структура относится к агломератам иголок, расположенным на ветви. При этом сама ветвь — расположение прутьев на ветви — описывается законом классического фрактала с $1 < D_f < 2$ в том же диапазоне переданных импульсов от 0.07 до 2 см⁻¹. Мы предположили, что структура прутьев, обеспечивающая транспортные функции в жизнедеятельности ветви, описывается подлежащей и вторичной по отношению к распределению хвои в пространстве, подчиняющемуся закону логарифмического фрактала. Закон логарифмического фрактала в двумерном пространстве интерпретируется как правило сохранения площади агломератов иголок при изменении масштаба: $d_i^2 = k d_{i+1}^2$, где d_i — характерный линейный размер агломерата i -й генерации, k — количество агломератов следующей генерации.

Благодарности. Авторы благодарны Ю. О. Четверикову за помощь в сборе данных.

Финансирование. Работа поддержана Российским научным фондом (грант № 20-12-00188).

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York (1983).

2. Y. Kim and D. L. Jaggard, *The Fractal Random Array*, Proc. of the IEEE **74**, 1278 (1986).
3. C. Puente, *Fractal Design of Multiband Antenna Arrays*, Elec. Eng. Dept. Univ. Illinois, Urbana-Champaign, ECE 477 term project (1993).
4. C. Puente and R. Pous, *Diseco Fractal de Agrupaciones de Antenas*, IX Simposium Nacional URSI, Las Palmas **1**, 227 (1994).
5. X. Yang, J. Chiochetti, D. Papadopoulos, and L. Susman, *Fractal Antenna Elements and Arrays*, Applied Microwave and Wireless **5**, 34 (1999).
6. M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Acad. Press, Boston (1988).
7. H. O. Peitgen and P. H. Richter, *The Beauty of Fractals*, Springer, Berlin (1986).
8. Е. Федер, *Фракталы*, Мир, Москва (1991).
9. В. К. Балханов, Ю. Б. Башкуев, *Моделирование разрядов молнии фрактальной геометрией*, ЖТФ **82**(12), 126 (2012).
10. А. Г. Бершадский, *Фрактальная структура турбулентных вихрей*, ЖЭТФ **96**, 625 (1989).
11. *Fractals in Biology and Medicine 1*, ed. by T. F. Nonnenmacher, G. A. Losa and E. R. Weibel, Birkhäuser Verlag, Basel (1994).
12. *Fractals in Biology and Medicine 2*, ed. by G. Losa, T. F. Nonnenmacher, D. Merlini, and E. R. Weibel, Birkhäuser Verlag, Basel (1998).
13. *Fractals in Biology and Medicine 3*, ed. by G. Losa, D. Merlini, T. F. Nonnenmacher and E. R. Weibel, Birkhäuser Verlag, Basel (2002).
14. *Fractals in Biology and Medicine 6*, ed. by G. Losa, D. Merlini, T. F. Nonnenmacher and E. R. Weibel, Birkhäuser Verlag, Basel (2005).
15. N. D. Lorimer, R. G. Haight, and R. A. Leary, *The Fractal Forest: Fractal Geometry and Applications in Forest Science*, General Technical Report NC-1770, Department of Agriculture, St. Paul (1994).
16. L. S. Liebovitch, *Fractals and Chaos Simplified for the Life Sciences*, Oxford Univ. Press, New York (1998).
17. I. C. Andronache, H. Ahammer, H. F. Jelineck et al., *Fractal Analysis for Studying the Evolution of Forests*, Chaos, Solitons, and Fractals **91**, 310 (2016).
18. А. И. Гурцев, Ю. Л. Цельникер, *Фрактальная структура ветви дерева*, Сибирский эколог. ж. **4**, 431 (1999).
19. G. Arseniou and D. W. MacFarlane, *Fractal Dimension of Tree Crowns Explains Species Functional-Trait Responses to Urban Environments at Different Scales*, Ecological Applications **31**, 2297 (2021).
20. C. Eloy, *Leonardo's Rule, Self-Similarity and Wind-Induced Stresses in Trees*, Phys. Rev. Lett. **107**, 258101 (2011).
21. J. O. Indekeu and G. Fleerackers, *Logarithmic Fractals and Hierarchical Deposition of Debris*, Physica A **261**, 294 (1998).
22. G.B. West, J.H. Brown and B.J. Enquist, *A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology*, Science **276**, 122 (1997).
23. G. B. West, J. H. Brown, and B.J. Enquist, *A General Model for the Structure and Allometry of Plant Vascular Systems*, Nature **400**, 664 (1999).
24. D. Seidel, *A Holistic Approach to Determine Tree Structural Complexity Based on Laser Scanning Data and Fractal Analysis*, Ecology and Evolution **8**, 128 (2018).
25. Y. Malhi, T. Jackson, L. Patrick Bentley, A. Lau, A. Shenkin, M. Herold, K. Calders, H. Bartholomeus, and M.I. Disney, *New Perspectives on the Ecology of Tree Structure and Tree Communities through Terrestrial Laser Scanning*, Interface Focus **8**, 20170052 (2018).
26. S. V. Grigoriev, O. D. Shnyrkov, P. M. Pustovoyt, E. G. Iashina, and K. A. Pshenichnyi, *Experimental Evidence for Logarithmic Fractal Structure of Botanical Trees*, Phys. Rev. E **105**, 044412 (2022).
27. С. В. Григорьев, О. Д. Шнырков, К. А. Пшеничный, Е. Г. Яшина, *Два этапа формирования структуры ветвления листовенного дерева*, ЖЭТФ **165**, 438 (2024).
28. D. D. Smith, J. S. Sperry, B. J. Enquist, V. M. Savage, K. A. McCulloh, and L. P. Bentley, *Deviation from Symmetrically Self-Similar Branching in Trees Predicts Altered Hydraulics, Mechanics, Light Interception and Metabolic Scaling*, New Phytologist **201**, 217 (2014).
29. B. Zeide, *Fractal Analysis of Foliage Distribution in Loblolly Pine Crowns*, Canad. J. Forest Res. **28**, 106 (1998).
30. B. Zeide and C. A. Gresham, *Fractal Dimensions of Tree Crowns in Three Loblolly Pine Plantations of Coastal South Carolina*, Canad. J. Forest Res. **21**, 1208 (1991).

31. B. Zeide and P. Pfeifer, *A Method for Estimation of Fractal Dimension of Tree Crowns*, Forest Sci. **37**, 1253 (1991).
32. D. Zhang, A. Samal, and J.R. Brandle, *A Method for Estimating Fractal Dimension of Tree Crowns from Digital Images*, Int. J. Pattern Recognition and Artificial Intelligence **21**, 561 (2007).
33. R. Zwiggelaar and C.R. Bull, *Optical Determination of Fractal Dimensions Using Fourier Transforms*, Opt. Eng. **34**, 1325 (1995).
34. А. А. Зинчик, Я. Б. Музыченко, А. В. Смирнов, С. К. Стафеев, *Расчет фрактальной размерности регулярных фракталов по картине дифракции в дальней зоне*, Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО **60**, 17 (2009).
35. J. Teixeira, *Small-Angle Scattering by Fractal Systems*, J. Appl. Crystallog. **21**, 781 (1988).
36. C. Allain and M. Cloitre, *Optical Diffraction on Fractals*, Phys. Rev. B **33**, 3566 (1986).
37. Дж. Гудмен, *Введение в фурье-оптику*, Мир, Москва (1970).
38. А. Н. Матвеев, *Оптика*, Высшая школа, Москва (1985).
39. П. М. Пустовойт, Е. Г. Яшина, К. А. Пшеничный, С. В. Григорьев, *Классификация фрактальных и нефрактальных объектов в пространстве двух измерений*, Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования **12**, 3 (2020).
40. Ю. Л. Цельникер, *Структура кроны ели*, Лесоведение **4**, 35 (1994).
41. Ю. Л. Цельникер, М. Д. Корзухин, Б.Б. Зейде, *Морфологические и физиологические исследования кроны деревьев*, Мир Урании, Москва (2000).
42. <https://github.com/tre3k/fractal>.
43. С. В. Григорьев, О. Д. Шнырков, К. А. Пшеничный, П. М. Пустовойт, Е. Г. Яшина, *Модель фрактальной организации хроматина в двумерном пространстве*, ЖЭТФ **163**, 428 (2023).