ЖЭТФ, 2023, том 164, вып. 5 (11), стр. 863–869

ОПТИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ БИНАРНОГО БОЗЕ-КОНДЕНСАТА

В. П. Рубан *

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 26 мая 2023 г.,
после переработки 26 мая 2023 г.
Принята к публикации 31 мая 2023 г.

Связанные нелинейные уравнения Шредингера для параксиальной оптики с двумя круговыми поляризациями света в дефокусирующей керровской среде с аномальной дисперсией по форме совпадают с уравнениями Гросса–Питаевского для бинарного бозе-конденсата холодных атомов в режиме разделения фаз. При этом винтовая симметрия оптического волновода соответствует вращению поперечного потенциала, удерживающего бозе-конденсат. Значительное влияние на распространение световой волны в такой системе оказывает «центробежная сила». Численные эксперименты для волновода эллиптического сечения выявили ранее не наблюдавшиеся в оптике характерные структуры, состоящие из квантованных вихрей и доменных стенок между двумя поляризациями.

DOI: 10.31857/S0044451023110160

EDN: PKISHU

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, распространение квазимонохроматической световой волны в оптической среде с керровской нелинейностью приближенно описывается нелинейным уравнением Шредингера (НУШ), см., например, [1–4] и ссылки там. При этом волна в дефокусирующей среде с аномальной дисперсией групповой скорости подобна разреженному бозе-конденсату холодных отталкивающихся атомов, для которого характерны мягкие топологические возбуждения в виде квантованных вихрей [5]. Оптическая волна может нести в себе две круговые поляризации, и тогда свет описывается двумя связанными НУШ [6], аналогично бинарному бозе-конденсату [7–13]. В бинарной системе, помимо темных солитонов и квантованных вихрей в каждой из двух компонент, возможны еще доменные стенки, разделяющие области с правой и левой круговыми поляризациями [14–22]. Доменная стенка обладает эффективным поверхностным натяжением [10, 23], которое оказывает сильное воздействие на динамику областей. В теории бозе-конденсатов разделение фаз и сопутствующие ему явления исследованы весьма подробно (см., например, [24–48] и ссылки там). Что касается нелинейной оптики, существенно трехмерные бинарные световые структуры были обнаружены в недавних работах [21, 22].

В настоящей работе внимание уделено пока еще малоизученному вопросу о нелинейном квазимонохроматическом световом пучке с двумя поляризациями в широком волноводе с винтовой симметрией, где пространственная неоднородность показателя преломления среды $n = n_0 + \tilde{n}(x, y, \zeta)$ на несущей частоте ω_0 зависит от двух комбинаций обезразмеренных переменных:

$$\tilde{x} = x \cos \Omega\zeta + y \sin \Omega\zeta,$$
$$\tilde{y} = y \cos \Omega\zeta - x \sin \Omega\zeta.$$

В зависимости от рассматриваемой системы параметр Ω определяет или шаг винтового волновода, или период вращения атомной ловушки. Малое отклонение имеет вид

$$\tilde{n} \propto -U(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

где U — некоторая двумерная яма. Заметим сразу же, что эволюционной переменной вместо времени t у нас служит дистанция ζ вдоль оси волновода, а

* E-mail: ruban@itp.ac.ru

роль третьей «пространственной» координаты играет «запаздывающее» время

$$\tau = t - \zeta / v_{gr}.$$

При сравнении с бозе-конденсатами следует вместо ζ иметь в виду t, а вместо τ подразумевать z. Указанный тип волноводов интересен тем, что в физике холодных газов ему соответствует класс равномерно вращающихся внешних потенциалов

$$V(x, y, t) = \\ = U(x \cos \Omega t + y \sin \Omega t, y \cos \Omega t - x \sin \Omega t). \quad (1)$$

С практической точки зрения такие бесконечные по координате z потенциальные ямы для атомов едва ли реалистичны. Но для оптики они означают всего лишь возможную бесконечную протяженность светового пучка по переменной τ, что является вполне приемлемым приближением. Как известно, вращение бозе-конденсата приводит к появлению в нем квантованных вихрей с различными конфигурациями. Наличие двух компонент дополнительно обогащает картину доменными стенками [34–37]. Соответственно, и в оптике должны иметь место аналогичные режимы. Цель этой работы — пронаблюдать в численных экспериментах ранее неизвестные когерентные бинарные структуры, актуальные для оптических систем.

2. УРАВНЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Мы рассматриваем трехмерную, оптически прозрачную диэлектрическую среду с дефокусирующей керровской нелинейностью. Среда слабонеоднородна по пространству. Фоновая диэлектрическая проницаемость дается функцией частоты $\varepsilon(\omega)$, так что соответствующий закон дисперсии имеет вид

$$k(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}\omega / c.$$

Нас интересует область аномальной дисперсии групповой скорости (где $k''(\omega) < 0$). Как правило, такой диапазон находится вблизи низкочастотного края окна прозрачности (в реальных веществах это часто инфракрасная область спектра; см., например, работы [49, 50]).

Уравнения для медленных комплексных амплитуд $A_{1,2}(x, y, \tau, \zeta)$ левой и правой круговых поляризаций световой волны хорошо известны [6, 14–21]. Поэтому мы здесь только кратко напомним основную идею их вывода. Отправной точкой является следствие уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Вводятся медленные комплексные огибающие $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ заменами

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}[\mathbf{E} \exp(ik_0\zeta - i\omega_0 t)], \\ \boldsymbol{D} = \mathrm{Re}[\mathbf{D} \exp(ik_0\zeta - i\omega_0 t)],$$

где $k_0 = k(\omega_0)$ — несущее волновое число. Далее нужно подставить в (2) слабонелинейную материальную зависимость

$$\mathbf{D} \approx \int \varepsilon(\omega_0 + \tilde\omega)\mathbf{E}_{\tilde\omega} e^{-i\tilde\omega t}\frac{d\tilde\omega}{2\pi} + \\ + \tilde\varepsilon(x, y, \zeta)\mathbf{E} + \alpha(\omega_0)|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} + \beta(\omega_0)(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}^* \quad (3)$$

с отрицательными функциями α и β в дефокусирующем случае. В ходе преобразований возникает уравнение вида

$$\hat L \mathbf{E} = s\{\mathbf{E}\}$$

с линейным оператором

$$\hat L = (k_0 - i\partial_\zeta)^2 - [k(\omega_0 + i\partial_t)]^2$$

и малой правой частью, которая включает в себя поперечный лапласиан, нелинейность и пространственную неоднородность. В главном порядке по малости s можно положить

$$\hat L \approx 2k_0(-i\partial_\zeta - ik_0'\partial_t + k_0''\partial_t^2/2). \quad (4)$$

В конце вывода для перехода к скалярным функциям $A_{1,2}$ делается замена

$$\mathbf{E} \approx \left[(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)A_1 + (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)A_2\right]/\sqrt{2}. \quad (5)$$

В качестве масштаба для поперечных координат удобно взять некоторый большой параметр R_0 (порядка нескольких десятков длин волн, т. е. до одной сотни микрометров). Продольную координату ζ будем измерять в единицах $k_0 R_0^2$ (несколько сантиметров), переменную τ — в единицах $R_0\sqrt{k_0|k_0''|}$, а электрическое поле — в единицах $\sqrt{2\varepsilon(\omega_0)/|\alpha(\omega_0)|}/(k_0 R_0)$. Удерживающий потенциал тогда определяется как

$$V = -k_0^2 R_0^2 \tilde\varepsilon / 2\varepsilon(\omega_0).$$

В этих безразмерных переменных связанные нелинейные уравнения Шредингера имеют вид

$$i\frac{\partial A_{1,2}}{\partial \zeta} = \Big[-\frac{1}{2}\Delta + V(x,y,\zeta) + + |A_{1,2}|^2 + g_{12}|A_{2,1}|^2 \Big] A_{1,2}, \quad (6)$$

где

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_\tau^2$$

— трехмерный оператор Лапласа в «координатном» пространстве (x, y, τ). Параметр перекрестной фазовой модуляции

$$g_{12} = 1 + 2\beta(\omega_0)/\alpha(\omega_0)$$

в типичном случае примерно равен 2, что соответствует режиму разделения фаз.

В отличие от недавней работы [21], где рассматривались «невращающиеся» параболические потенциалы $(x^2 + \kappa^2 y^2)/2$, здесь мы сосредоточимся на винтовых волноводах с плоским дном и резкими стенками. Такие волноводы легче реализовать экспериментально. Но для численного моделирования более удобны гладкие потенциалы; поэтому мы будем аппроксимировать соответствующую прямоугольную яму выражением

$$U = C[1 - \exp\Big(-[(\tilde{x}^2 + \kappa^2\tilde{y}^2)/36]^5\Big)] \quad (7)$$

с большим параметром $C \sim 50$ и анизотропией $\kappa > 1$ (во всех вычислениях бралось значение $\kappa^2 = 1.5$). В результате указанного выбора эффективный диаметр волновода равен примерно 10 (до одного миллиметра). На таком масштабе укладывается несколько сотен длин волн света. При «частоте вращения» $\Omega \sim 1$ на площади поперечного сечения помещается порядка десятка квантованных вихрей, а ширина их сердцевин зависит от интенсивности волны как $\xi \sim 1/\sqrt{I}$. Такого же порядка и ширина доменной стенки w. Как мы увидим далее из численных результатов, наиболее интересны значения $I \lesssim 10$.

Важно, что уравнения (6) представляют собой гамильтонову систему

$$i\partial A_{1,2}/\partial\zeta = \delta\mathcal{H}/\delta A_{1,2}^*.$$

Соответствующий неавтономный гамильтониан есть

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int (|\nabla A_1|^2 + |\nabla A_2|^2) dxdyd\tau + + \int V(x,y,\zeta)(|A_1|^2 + |A_2|^2) dxdyd\tau + + \frac{1}{2}\int (|A_1|^4 + |A_2|^4 + 2g_{12}|A_1|^2|A_2|^2) dxdyd\tau. \quad (8)$$

Этот функционал не сохраняется в процессе эволюции. Однако, поскольку во вращающейся системе координат мы имеет автономную систему, интегралом движения является функционал

$$\mathcal{H}_\Omega = \mathcal{H} - \Omega \int [A^\dagger (iy\partial_x - ix\partial_y) A] dxdyd\tau, \quad (9)$$

где $A = (A_1, A_2)^T$ — двухкомпонентный столбец. Кроме того, сохраняются также интегралы интенсивностей

$$N_{1,2} = \int |A_{1,2}|^2 dxdyd\tau.$$

Для численного моделирования уравнений (6) использовался стандартный метод (split-step Fourier method) второго порядка точности по эволюционной переменной ζ в исходной (невращающейся) системе координат. Вычислительная область по переменным x, y, τ имела форму куба со стороной 6π, с периодическими граничными условиями. Но, поскольку потенциальная яма достаточно глубока, функции $A_{1,2}$ быстро убывают практически до нуля в поперечных направлениях, так что влияние поперечных границ пренебрежимо мало.

Точность вычислений контролировалась сохранением интегралов движения до 3–6 десятичных знаков на интервале $0 < \zeta < 500$ (что практически составляет длину распространения в несколько десятков метров).

Для численного приготовления начального состояния с как можно менее возбужденными жесткими степенями свободы применялся метод распространения в мнимом времени (imaginary-time propagation), причем в равномерно вращающейся системе координат. Этот метод соответствует чисто градиентной диссипативной динамике

$$-\partial A_{1,2}/\partial\eta = \delta\tilde{\mathcal{H}}/\delta A_{1,2}^*,$$

где модифицированный гамильтониан

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_\Omega - \mu(N_1 + N_2)$$

не содержит явной зависимости от квазивременной переменной η. Параметр μ (химический потенциал) определяет характерные значения интенсивностей

$$I_{1,2} = |A_{1,2}|^2 \sim \mu.$$

Интервал переменной η составлял несколько десятков, так что в результате все жесткие степени свободы были эффективно погашены и система оказывалась в медленном динамическом режиме недалеко от минимума $\tilde{\mathcal{H}}$.

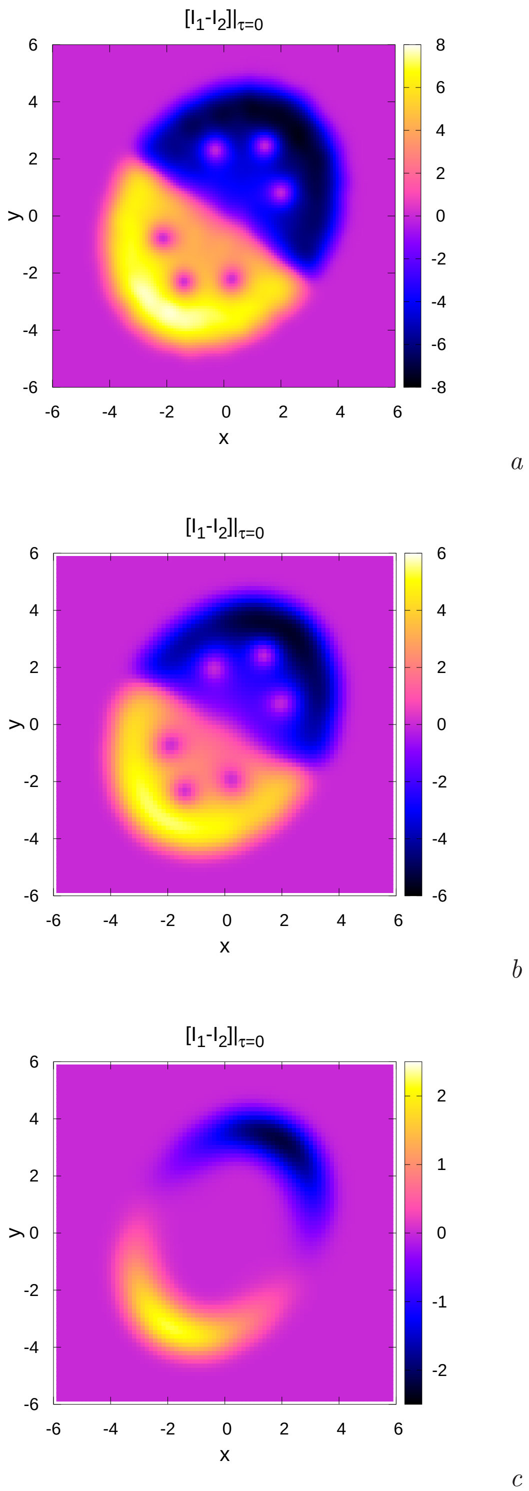


Рис. 1. Квазидвумерные конфигурации при $\zeta = 500$, соответствующие частоте вращения $\Omega = 0.8$. Показана разность локальных интенсивностей в поперечном сечении $\tau = 0$ для трех значений химического потенциала: $\mu = 4\,(a)$; $\mu = 2\,(b)$; $\mu = -1\,(c)$

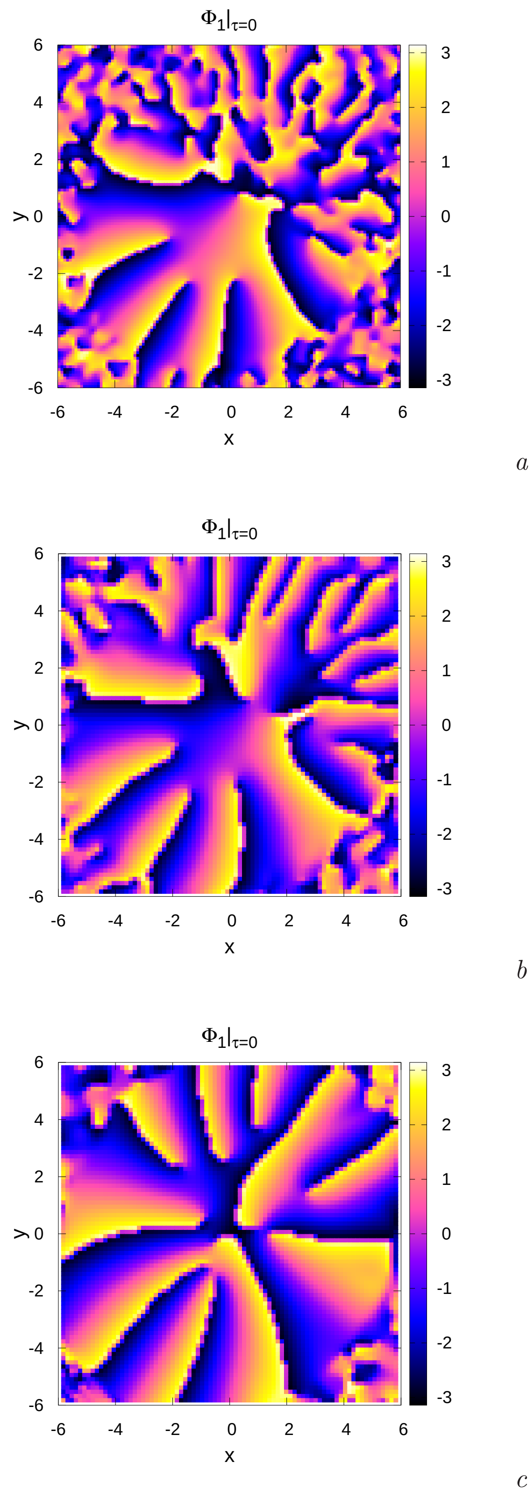


Рис. 2. Фаза Φ_1 комплексной огибающей A_1 для трех конфигураций, показанных на рис. 1. Здесь панели a, b, c соответствуют таковым на рис. 1

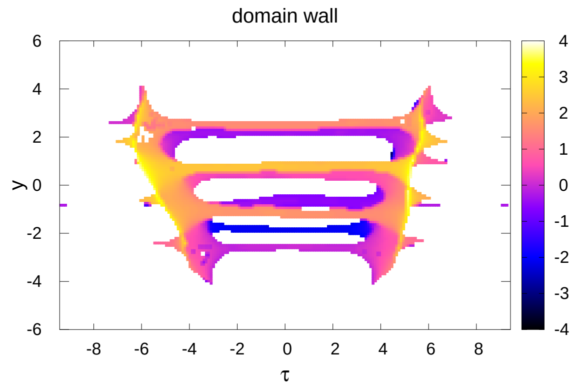
3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Были проведены две серии численных экспериментов. В первой серии исследовались квазидвумерные конфигурации, когда зависимость от переменной τ была слабой, так что вихревые нити шли более-менее параллельно доменной стенке. Во второй серии экспериментов вихри по-прежнему были ориентированы вдоль пучка, но при $\zeta = 0$ две доменные стенки (на одном периоде по τ) разрезали пучок поперек, образуя тем самым чередующиеся вдоль его оси области правой и левой поляризаций, так что вихри присоединялись своими концами к доменным стенкам и сильно деформировали их.

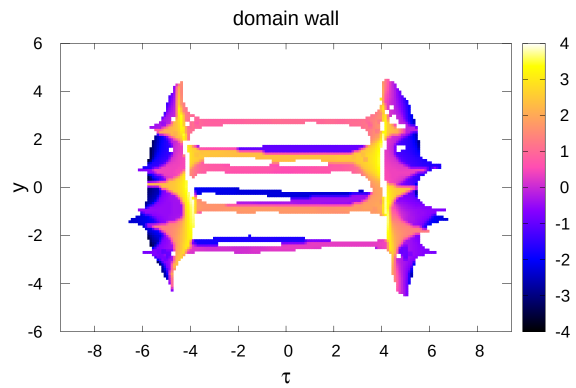
Характерные примеры из первой серии представлены на рис. 1 и 2. Поскольку динамика на всем интервале ζ оставалась квазидвумерной, достаточно показать типичное распределение полей в одном из поперечных сечений. Так как интенсивности I_1 и I_2 совместно отличны от нуля только лишь на толщине доменной стенки, их разность оказывается достаточно информативной величиной. Практически, если она положительна, то мы оказываемся в лево-поляризованной области, а если отрицательна, то — в право-поляризованной. При взгляде на рис. 1 бросается в глаза, что интенсивности максимальны не в центре волновода, а на периферии. Это свойство — прямое следствие действия «центробежной силы» во вращающейся системе координат. Центробежная сила прижимает «световые жидкости» к стенкам волновода. Особенно интересен в этом отношении рис. 1c, соответствующий отрицательному значению химического потенциала. Мы видим здесь, что в середине волновода имеется обширная область, где обе интенсивности практически равны нулю. Это есть не что иное, как нелинейный вариант эффекта шепчущей галереи. Интересную информацию о положении вихрей дает рис. 2, где показаны соответствующие рис. 1 распределения фазы первой компоненты. Видно, что лишь часть вихрей расположена в области с заметной интенсивностью I_1 (явные вихри). Эти явные вихри избегают максимумов интенсивности и потому группируются ближе к центру. Другая часть (скрытые вихри) находится в области, где I_1 ничтожно мала. На рис. 1c вообще нет явных вихрей, но имеется десяток скрытых вихрей именно в «пустой» центральной области волновода, как это следует из рис. 2c.

Что касается второй серии экспериментов, то существенно трехмерная эволюция поперечных доменных стенок с присоединенными вихрями проходила различно для различных значений μ. При малых значениях $\mu = 0$ и $\mu = 1$ такие конфигурации быстро «разбалтывались», а затем, после некоторого переходного процесса, формировались квазидвумерные состояния, подобные описанным выше. При больших значениях $\mu = 4$ и $\mu = 8$ поперечные стенки, хотя и приобретали в среднем наклонную ориентацию, зависящую от ζ, продолжали свое существование на всем интервале ζ вплоть до самого конца вычислений. Понимания подобной смены режимов поведения пока нет. Два примера трехмерных структур показаны на рис. 3 (ср. с [37]).

Надо сказать, что при меньшей частоте вращения количество вихрей уменьшается, а стремление к поперечной ориентации доменных стенок усиливается. Эта тенденция вступает в конфликт



a



b

Рис. 3. Численные примеры долгоживущих поперечных доменных стенок с присоединенными вихрями при $\zeta = 500$, $\Omega = 0.8$ для $\mu = 4$ (a) и $\mu = 8$ (b). Цветом отмечена x-координата тех точек числовой решетки, на которых $0 < (I_1 - I_2) < d$, причем $d = 1.0$ в случае (a) и $d = 1.8$ в случае (b). Поэтому оказались визуализированными сердцевины вихрей в первой компоненте, а также тонкий слой вблизи серединной поверхности каждой доменной стенки с упоминавшейся квазидвумерностью течений при небольших μ. Как следствие, в определенной области параметров (Ω, μ) оказывается возможен нетривиальный промежуточный режим, когда имеются один-два вихря и нестационарная, трехмерно-возмущенная доменная стенка, причем вихри способны иногда «прятаться» в эту стенку, полностью или частично. Такая динамика наблюдалась, например, при $\Omega = 0.4$, $\mu = 2$. Следует провести подробное исследование этого режима.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в этой работе проведена теоретическая аналогия между когерентной оптической волной в широком винтовом волноводе и вращающимся бинарным бозе-конденсатом холодных атомов. Некоторое различие между этими двумя системами состоит в виде поперечного удерживающего потенциала. Для атомов проще реализовать квадратичный потенциал, а для оптического волновода — плоский профиль показателя преломления с резкими краями. Соответственно, влияние центробежной силы более заметно в последнем случае. Указанное различие приводит к несколько различающимся квазистационарным картинам, как это видно из сравнения представленных здесь рисунков с рисунками в работах [34–37].

Нет сомнения, что данное направление исследований имеет широкие перспективы. Хотя пока что сделаны лишь первые шаги, но уже получены нетривиальные результаты и намечены очередные цели. В первую очередь, необходимо более систематически пройти по параметрической области (N_1, N_2, Ω). Кроме того, с практической точки зрения важно изучить переходные динамические процессы, поскольку сформировать квазистационарные состояния сразу на входе в волновод будет затруднительно. Помимо винтовых волноводов, интересные эффекты должны иметь место и при некоторых других зависимостях формы поперечного сечения от координаты ζ. Так, периодические колебания площади сечения или других его геометрических параметров могут послужить причиной параметрических резонансов, которые в нелинейных системах обычно приводят к образованию определенных когерентных структур (см. в качестве примеров работы [32, 33]).

Вопрос о том, адекватна ли простейшая модель (6) для планирования и осуществления оптических экспериментов, нуждается в дальнейшем серьезном рассмотрении. В реальных веществах могут оказать влияние неучтенные здесь факторы, например, дисперсия третьего порядка и т. п. Было бы в принципе интересно выйти за рамки квазимонохроматического режима и посмотреть, как при этом изменится волновая картина.

Финансирование. Работа выполнена в рамках Госзадания 0029-2021-0003.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, 1st ed., Academic Press, California, USA (2003).

2. V. E. Zakharov and S. Wabnitz, *Optical Solitons: Theoretical Challenges and Industrial Perspectives*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1999).

3. B. A. Malomed, *Multidimensional Solitons*, AIP Publishing (online), Melville, N. Y. (2022), https://doi.org/10.1063/9780735425118

4. F. Baronio, S. Wabnitz, and Yu. Kodama, Phys. Rev. Lett. **116**, 173901 (2016).

5. P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-González, *The Defocusing Nonlinear Schrödinger Equation: From Dark Solitons to Vortices and Vortex Rings*, SIAM, Philadelphia (2015).

6. А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров, ЖЭТФ **58**, 903 (1970).

7. Tin-Lun Ho and V. B. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **77**, 3276 (1996).

8. H. Pu and N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **80**, 1130 (1998).

9. B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **85**, 2857 (2000).

10. S. Coen and M. Haelterman, Phys. Rev. Lett. **87**, 140401 (2001).

11. G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli, G. Roati, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **89**, 190404 (2002).

12. E. Timmermans, Phys. Rev. Lett. **81**, 5718 (1998).

13. P. Ao and S. T. Chui, Phys. Rev. A **58**, 4836 (1998).

14. M. Haelterman and A. P. Sheppard, Phys. Rev. E **49**, 3389 (1994).

15. M. Haelterman and A. P. Sheppard, Phys. Rev. E **49**, 4512 (1994).

16. A. P. Sheppard and M. Haelterman, Opt. Lett. **19**, 859 (1994).

17. Yu. S. Kivhsar and B. Luther-Davies, Phys. Rep. **298**, 81 (1998).

18. N. Dror, B. A. Malomed, and J. Zeng, Phys. Rev. E **84**, 046602 (2011).

19. A. H. Carlsson, J. N. Malmberg, D. Anderson, M. Lisak, E. A. Ostrovskaya, T. J. Alexander, and Yu. S. Kivshar, Opt. Lett. **25**, 660 (2000).

20. A. S. Desyatnikov, L. Torner, and Yu. S. Kivshar, Progr. Opt. **47**, 291 (2005).

21. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **117**, 292 (2023).

22. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **117**, 590 (2023).

23. B. Van Schaeybroeck, Phys. Rev. A **78**, 023624 (2008).

24. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 033602 (2011).

25. H. Takeuchi, N. Suzuki, K. Kasamatsu, H. Saito, and M. Tsubota, Phys. Rev. B **81**, 094517 (2010).

26. N. Suzuki, H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Saito, Phys. Rev. A **82**, 063604 (2010).

27. H. Kokubo, K. Kasamatsu, and H. Takeuchi, Phys. Rev. A **104**, 023312 (2021).

28. K. Sasaki, N. Suzuki, D. Akamatsu, and H. Saito, Phys. Rev. A **80**, 063611 (2009).

29. S. Gautam and D. Angom, Phys. Rev. A **81**, 053616 (2010).

30. T. Kadokura, T. Aioi, K. Sasaki, T. Kishimoto, and H. Saito, Phys. Rev. A **85**, 013602 (2012).

31. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 053606 (2011).

32. D. Kobyakov, V. Bychkov, E. Lundh, A. Bezett, and M. Marklund, Phys. Rev. A **86**, 023614 (2012).

33. D. K. Maity, K. Mukherjee, S. I. Mistakidis, S. Das, P. G. Kevrekidis, S. Majumder, and P. Schmelcher, Phys. Rev. A **102**, 033320 (2020).

34. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **91**, 150406 (2003).

35. K. Kasamatsu and M. Tsubota, Phys. Rev. A **79**, 023606 (2009).

36. P. Mason and A. Aftalion, Phys. Rev. A **84**, 033611 (2011).

37. K. Kasamatsu, H. Takeuchi, M. Tsubota, and M. Nitta, Phys. Rev. A **88**, 013620 (2013).

38. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **113**, 848 (2021).

39. В. П. Рубан, ЖЭТФ **160**, 912 (2021).

40. K. J. H. Law, P. G. Kevrekidis, and L. S. Tuckerman, Phys. Rev. Lett. **105**, 160405 (2010); *Erratum*, Phys. Rev. Lett. **106**, 199903 (2011).

41. M. Pola, J. Stockhofe, P. Schmelcher, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. A **86**, 053601 (2012).

42. S. Hayashi, M. Tsubota, and H. Takeuchi, Phys. Rev. A **87**, 063628 (2013).

43. G. C. Katsimiga, P. G. Kevrekidis, B. Prinari, G. Biondini, and P. Schmelcher, Phys. Rev. A **97**, 043623 (2018).

44. A. Richaud, V. Penna, R. Mayol, and M. Guilleumas, Phys. Rev. A **101**, 013630 (2020).

45. A. Richaud, V. Penna, and A. L. Fetter, Phys. Rev. A **103**, 023311 (2021).

46. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **113**, 539 (2021).

47. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **115**, 450 (2022).

48. V. P. Ruban, W. Wang, C. Ticknor, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. A **105**, 013319 (2022).

49. X. Liu, B. Zhou, H. Guo, and M. Bache, Opt. Lett. **40**, 3798 (2015).

50. X. Liu and M. Bache, Opt. Lett. **40**, 4257 (2015).