ЖЭТФ, 2025, том 167, вып. 3, стр. 328–337 © 2025

ТЕНЗОР ПОЛЯРИЗАЦИИ И СЕЧЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

С. И. Мармо**, Н. Л. Манаков, А. А. Крыловецкий

Воронежский государственный университет
394018, Воронеж, Россия

Поступила в редакцию 7 ноября 2024 г.,
после переработки 7 ноября 2024 г.
Принята к публикации 13 ноября 2024 г.

Компоненты тензора поляризации тормозного излучения в центральном поле $U(r)$ выражены через интегралы от одной скалярной комплексной функции, определяющей фурье-образ классической скорости $\mathbf{v}_\omega$. В рамках максвелловского формализма электродинамики получено сечение тормозного излучения, учитывающее его поляризацию. Приведены явные выражения для тензора поляризации и сечения кулоновского тормозного излучения в классическом и квантовом случаях.

DOI: 10.31857/S0044451025030046

1. ВВЕДЕНИЕ

В курсе классической электродинамики [1] дано полное описание тормозного излучения, возникающего при рассеянии пучка заряженных частиц в центральном поле $U(r)$: найдены спектральное и угловое распределения излучения, а также показано, что интенсивность излучения можно представить как сумму интенсивностей двух независимых волн, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Расчет углового распределения основан на использовании осевой симметрии системы при интегрировании по азимутальному углу φ общего выражения для эффективного излучения

$$\frac{d\varkappa_{\omega\mathbf{k}}}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{4\pi^2 c^3}\iint |[\ddot{\mathbf{d}}_\omega \times \hat{\mathbf{k}}]|^2 \rho d\rho d\varphi \qquad (1)$$

(где $\mathbf{d}_\omega$ — фурье-образ дипольного момента частицы относительно центра поля, ρ — прицельный параметр), определяющего распределение излучения по частотам ω и направлениям $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ ($\mathbf{k}$ — волновой вектор). Окончательное выражение, определяющее распределение интенсивности излучения в зависимости от угла θ между осью симметрии Z и направлением излучения $\mathbf{k}$,

$$\frac{d\varkappa_{\omega\mathbf{k}}}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{4\pi^2 c^3}\left(A(\omega) + B(\omega)\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right), \qquad (2)$$

определяется двумя параметрами:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{4\pi}{3}\int\limits_0^\infty |\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2 \rho d\rho, \\ B(\omega) &= \frac{2\pi}{3}\int\limits_0^\infty (|\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2 - 3|\ddot{d}_{Z\omega}|^2)\rho d\rho. \end{aligned} \qquad (3)$$

Использование осевой симметрии позволяет также установить, что эффективное излучение (1) разлагается на сумму интенсивностей двух независимых волн, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях:

$$d\varkappa_{\omega\mathbf{k}} = d\varkappa^{\perp}_{\omega\mathbf{k}} + d\varkappa^{\parallel}_{\omega\mathbf{k}}, \qquad (4)$$

где

$$d\varkappa^{\perp}_{\omega\mathbf{k}} = \frac{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi c^3}\int\limits_0^\infty (|\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2 - |\ddot{d}_{Z\omega}|^2)\rho d\rho \qquad (5)$$

— интенсивность волны, поляризованной перпендикулярно плоскости испускания (в которой лежат волновой вектор $\mathbf{k}$ и начальный импульс $\mathbf{p}$), $d\varkappa^{\parallel}_{\omega\mathbf{k}}$ — интенсивность волны, поляризованной в плоскости испускания.

* E-mail: marmo@phys.vsu.u

Несмотря на то, что выражения (2), (4), (5) полностью определяют поляризацию тормозного излучения, более последовательное ее описание можно дать с помощью тензора поляризации $\rho_{\alpha\beta}$. Действительно, тензор поляризации введен в [1] (см. §50) как основная величина, характеризующая частично поляризованный свет. Зная тензор поляризации, можно найти другие характеристики поляризации излучения (степень поляризации, параметры Стокса) и разложить излучение на две некогерентные, в общем случае эллиптически поляризованные волны. Если тензор поляризации вещественен (параметр Стокса $\xi_2 = 0$), то излучение раскладывается на две некогерентные линейно поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях волны, это и есть разложение (4). Отношение слагаемых в (4) — коэффициент деполяризации — равно отношению диагональных компонент рассчитанного в главных осях тензора поляризации. Кроме того, как будет показано ниже, зная тензор поляризации, эффективное излучение (1) можно обобщить, введя величину $d\varkappa_{\mathbf{e}\omega\mathbf{k}}$, которая равна интенсивности тормозного излучения с частотой ω в направлении $\mathbf{k}$, прошедшего через фильтр, пропускающий волну с волновым вектором поляризации $\mathbf{e}$. Очевидно, что величина $d\varkappa_{\mathbf{e}\omega\mathbf{k}}$ с точностью до множителя по смыслу эквивалентна сечению тормозного излучения $d\sigma_{\mathbf{ek}}(\omega)$, которое используется в квантовой электродинамике, поэтому $d\varkappa_{\mathbf{e}\omega\mathbf{k}}$ удобно использовать при сравнении результатов квантовой и классической теорий тормозного излучения. Таким образом, тензор поляризации полностью определяет поляризационное состояние излучения, поскольку через его компоненты выражаются все остальные поляризационные характеристики. Заметим однако, что при исследовании тормозного излучения, представляющего собой частично поляризованный свет, в [1] (см. §68) не рассчитан тензор поляризации, а найдены интенсивности $d\varkappa^{\perp}_{\omega\mathbf{k}}$ и $d\varkappa^{\parallel}_{\omega\mathbf{k}}$ из (4). Так же описывается поляризация тормозного излучения в работе [2], в которой в качестве характеристики поляризации классического тормозного излучения в экранированном кулоновском поле рассчитывалась величина

$$\mathcal{P}^{(l)} = \frac{d\varkappa^{\perp}_{\omega\mathbf{k}} - d\varkappa^{\parallel}_{\omega\mathbf{k}}}{d\varkappa^{\perp}_{\omega\mathbf{k}} + d\varkappa^{\parallel}_{\omega\mathbf{k}}}. \tag{6}$$

В настоящей работе показано, как в классической электродинамике можно ввести тензор поляризации и сечение тормозного излучения. В разд. 2 уточнено обычное определение тензора поляризации применительно к случаю излучения на фиксированной частоте и, далее, общее выражение для тензора поляризации тормозного излучения в центральном поле преобразовано к форме, в которой главные компоненты тензора выражены через интегралы от скалярной функции, определяющей фурье-образ скорости частицы в поле $U(r)$. В разд. 3 с использованием тензора поляризации получено классическое сечение тормозного излучения, учитывающее поляризацию излучения. В разд. 4 предложен способ расчета тензора поляризации с помощью сечения процесса, применимый и в классическом, и в квантовом подходе. В разд. 5 приведены явные выражения, определяющие квантовый и классический тензоры поляризации кулоновского тормозного излучения, и показано, что квантовые результаты переходят в классические при формальном устремлении $\hbar \to 0$. В разд. 6 найдены асимптотики тензора поляризации в области низких и высоких частот и приведены численные результаты.

2. ТЕНЗОР ПОЛЯРИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКОГО ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Найдем поляризационные характеристики излучения, возникающего при рассеянии пучка заряженных частиц на точечном центре. Как известно, тормозное излучение от отдельной частицы, движущейся по классической траектории $\mathbf{r}(t)$, является полностью поляризованным: в этом случае выражение для электрического вектора дипольного излучения на частоте ω в волновой зоне [1],

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{1}{c^2 r}[[\ddot{\mathbf{d}}_\omega \times \hat{\mathbf{k}}] \times \hat{\mathbf{k}}] \tag{7}$$

($\hat{\mathbf{k}}$ — направление распространения волны), определяет и вектор поляризации излучения. Излучение пучка частиц есть результат некогерентного сложения излучения от отдельных частиц, поэтому оно является лишь частично поляризованным и характеризуется тензором поляризации $J_{\alpha\beta}$. Тензор поляризации определяется как квадратичная функция поля $E_\alpha(t)E^*_\beta(t)$, усредненная по времени [1] или по времени и по ансамблю независимых источников [3]. Поскольку мы исследуем излучение на определенной частоте, которое задается фурье-образами компонент поля $E_{\omega\alpha}$, не зависящими от времени, тензор поляризации тормозного излучения следует определить равенством

$$J_{\alpha\beta} = \frac{c}{4\pi^2} r^2 \iint E_{\omega\alpha} E^*_{\omega\beta} \rho d\rho d\varphi, \tag{8}$$

где ρ, φ — прицельные параметры, учитывающим излучение всех независимых источников. Нормированный тензор поляризации (поляризационную матрицу плотности) $\rho_{\alpha\beta}$ получим, разделив $J_{\alpha\beta}$ на величину

$$J \equiv \sum_\alpha J_{\alpha\alpha} = \frac{c}{4\pi^2} r^2 \iint \mathbf{E}_\omega \cdot \mathbf{E}^*_\omega \, \rho d\rho d\varphi,$$

пропорциональную интенсивности тормозного излучения:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{J_{\alpha\beta}}{J}, \qquad \sum_\alpha \rho_{\alpha\alpha} = 1. \tag{9}$$

Множитель перед интегралом в (8) не влияет на величину $\rho_{\alpha\beta}$ и введен для упрощения последующих формул.

Учитывая связь прицельных параметров с углами рассеяния частицы ϑ и φ,

$$\rho d\rho d\varphi = \tilde{\sigma}_0 d\Omega_{\mathbf{p}'},$$

где $\tilde{\sigma}_0 \equiv d\sigma_0/d\Omega_{\mathbf{p}'}$ — сечение упругого рассеяния в телесный угол $d\Omega_{\mathbf{p}'} = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ возле конечного импульса $\mathbf{p}'$, выразим тензор $J_{\alpha\beta}$ через интеграл по углам рассеяния:

$$J_{\alpha\beta} = \frac{c}{4\pi^2} r^2 \int E_{\omega\alpha} E^*_{\omega\beta} \tilde{\sigma}_0 d\Omega_{\mathbf{p}'} = \\ = \frac{c}{4\pi^2} r^2 \iint E_{\omega\alpha} E^*_{\omega\beta} \tilde{\sigma}_0 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi. \tag{10}$$

Будем искать компоненты $J_{\alpha\beta}$ в физически выделенной системе координат с осями, направленными по $\hat{\mathbf{k}}$ (направлению распространения волны), $[\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{p}}]$ (перпендикулярно плоскости испускания) и $[\hat{\mathbf{k}} \times [\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{p}}]]$ (в плоскости испускания перпендикулярно $\hat{\mathbf{k}}$), см. рис. 1. Введем орты этой системы координат:

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{[\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{p}}]}{|\sin\theta|}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{[\hat{\mathbf{k}} \times [\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{p}}]]}{|\sin\theta|}, \quad \boldsymbol{\tau}_3 = \hat{\mathbf{k}}, \tag{11}$$

где $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$, $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$, $\hat{\mathbf{p}}' = \mathbf{p}'/p'$ — единичные векторы в направлении $\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'$, θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$.

Воспользовавшись тем, что $\ddot{\mathbf{d}}_\omega = -ie\omega\mathbf{v}_\omega$, будем выражать фурье-компоненту напряженности электрического поля (7) через фурье-компоненту классической скорости $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$:

$$\mathbf{v}_\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t) \exp(i\omega t) dt.$$

Из соображений пространственно-временной симметрии следует, что в произвольном центральном поле $U(r)$ фурье-образ скорости может быть представлен как

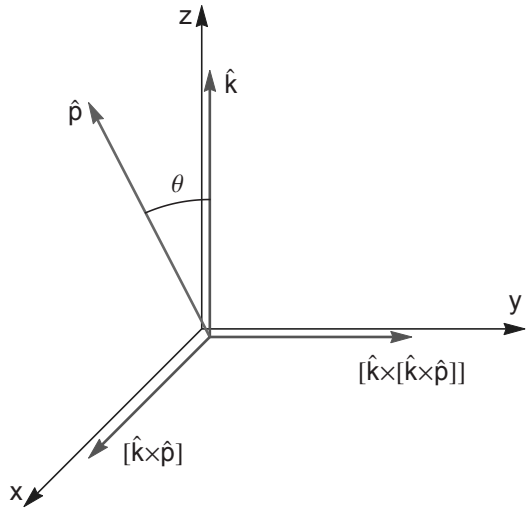

Рис. 1. Главные оси тензора поляризации $\rho_{\alpha\beta}$

$$\mathbf{v}_\omega = f_1(p, \omega, \vartheta)\hat{\mathbf{p}} + f_2(p, \omega, \vartheta)\hat{\mathbf{p}}', \tag{12}$$

где

$$f_1(p, \omega, \vartheta) = f_2(p, -\omega, \vartheta). \tag{13}$$

Здесь учтено, что при классическом рассмотрении тормозного излучения пренебрегают потерей энергии электроном, т. е. $p' = p$. Найдем проекции $\mathbf{E}_\omega$ на оси x, y, вычисляя скалярные произведения $\mathbf{E}_\omega \cdot \boldsymbol{\tau}_1$ и $\mathbf{E}_\omega \cdot \boldsymbol{\tau}_2$:

$$\begin{aligned} E_{x\omega} &= \mathcal{C} f_2(\hat{\mathbf{p}}' \cdot [\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{p}}]), \\ E_{y\omega} &= \mathcal{C}[f_1((\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 - 1) + \\ &+ f_2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}})(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}') - f_2(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}')], \\ \mathcal{C} &= -i\frac{e\omega}{c^2 r \sin\theta}. \end{aligned} \tag{14}$$

Чтобы провести интегрирование в (10), введем систему координат с осью Z вдоль $\hat{\mathbf{p}}$ и осями X и Y вдоль $[\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{p}}]$ и $[\hat{\mathbf{p}} \times [\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{p}}]]$. Тогда $\hat{\mathbf{p}}' = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$, где ϑ, φ — углы рассеяния, по которым интегрируется в (10). Интеграл по φ элементарно вычисляется, при этом недиагональные компоненты обращаются в нуль,

$$J_{12} = J_{21} = 0, \tag{15}$$

а диагональные компоненты

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{e^2\omega^2}{4\pi c^3} A^\perp, \\ J_{22} &= \frac{e^2\omega^2}{4\pi c^3}(A^\perp \cos^2\theta + 2A^\parallel \sin^2\theta) \end{aligned} \tag{16}$$

выражаются через два параметра:

$$A^{\perp} = \int\limits_0^{\pi} |f_2|^2 \tilde{\sigma}_0 \sin^3\vartheta d\vartheta = \int\limits_0^{\pi} |\mathbf{v}_{\omega}^{\perp}|^2 \tilde{\sigma}_0 \sin\vartheta d\vartheta, \quad (17)$$

в который входит нормальная к $\hat{\mathbf{p}}$ составляющая $\mathbf{v}_{\omega}$, и

$$A^{\parallel} = \int\limits_0^{\pi} |f_1 + f_2\cos\vartheta|^2 \tilde{\sigma}_0 \sin\vartheta d\vartheta = \int\limits_0^{\pi} |\mathbf{v}_{\omega}^{\parallel}|^2 \tilde{\sigma}_0 \sin\vartheta d\vartheta, \quad (18)$$

в который входит составляющая $\mathbf{v}_{\omega}$ вдоль вектора $\hat{\mathbf{p}}$.

Сравнивая (16) с (4) и (2), нетрудно убедиться, что

$$J_{11} + J_{22} = \frac{d\varkappa_{\omega\mathbf{k}}}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}}, \quad J_{11} = \frac{d\varkappa_{\omega\mathbf{k}}^{\perp}}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}}, \quad (19)$$

так что

$$J_{22} = \frac{d\varkappa_{\omega\mathbf{k}}^{\parallel}}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}}. \quad (20)$$

Таким образом, наши результаты эквивалентны полученным в [1], но формулы (16) дают явные инвариантные выражения и для поперечной, и для продольной составляющей в (4) через скалярные функции f_1 и f_2 — с учетом равенства (13), фактически, через одну функцию. Согласно (4), $A^{\perp}$ и $A^{\parallel}$ определяют также угловое распределение излучения (3):

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{4\pi e^2\omega^2}{3}(A^{\perp} + A^{\parallel}), \\ B(\omega) &= \frac{2\pi e^2\omega^2}{3}(A^{\perp} - 2A^{\parallel}). \end{aligned} \quad (21)$$

Дальнейшее вычисление компонент тензора поляризации возможно только при задании явного вида рассеивающего потенциала $U(r)$. Однако общий характер поляризации излучения при рассеянии в произвольном центральном поле ясен уже из полученных результатов. Из (9), (16), (17), (18) очевидно, что определитель матрицы $\rho_{\alpha\beta}$ положителен: $|\rho_{\alpha\beta}| > 0$. Это означает, что излучение является частично поляризованным (напомним, что для полностью поляризованного излучения определитель $|\rho_{\alpha\beta}|$ равен нулю). Степень поляризации $P = \sqrt{1 - 4|\rho_{\alpha\beta}|}$ обращается в нуль при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, имеет максимум

$$P_{max} = \frac{|A^{\perp} - 2A^{\parallel}|}{A^{\perp} + 2A^{\parallel}} \quad (22)$$

при $\theta = \pi/2$ и одинакова в направлениях θ и $\pi - \theta$. Далее, из обращения в нуль недиагональных компонент тензора поляризации в выбранной нами системе координат следует, что степень циркулярной поляризации излучения (параметр Стокса ξ_2) равна нулю. Таким образом, тормозное излучение (с определенной частотой), возникающее при рассеянии пучка частиц на центре с потенциалом $U(r)$, можно представить как наложение двух некогерентных волн, линейно поляризованных вдоль направлений $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ (см. (11) и рис. 1), интенсивности которых даются равенствами (19), (20). Отметим также, что выражение под радикалом в определении степени поляризации P есть квадрат выражения (6), так что $|\mathcal{P}^{(l)}| = P$.

3. СЕЧЕНИЕ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Зная тензор $\rho_{\alpha\beta}$, можно перейти к описанию поляризации излучения с помощью сечения процесса, зависящего от вектора поляризации, аналогично тому, как это делается в квантовой теории [4] (см. §92). Чтобы найти зависимость интенсивности излучения от поляризации, следует вычислить скалярное произведение тензора $\rho_{\alpha\beta}$ и тензора $e_{\alpha}^{*}e_{\beta}$. Свернув $e_{\alpha}^{*}e_{\beta}$ с тензором $J_{\alpha\beta}$ (8), который лишь множителем отличается от $\rho_{\alpha\beta}$, получим величину

$$\begin{aligned} \frac{d\varkappa_{\mathbf{e}\omega\mathbf{k}}}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}} &= \frac{c}{4\pi^2} r^2 \iint |(\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}_{\omega})|^2 \rho d\rho d\varphi = \\ &= \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c^3} \iint |(\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{v}_{\omega})|^2 \rho d\rho d\varphi, \end{aligned} \quad (23)$$

которая обобщает (1) и определяет интенсивность излучения на частоте ω в направлении $\mathbf{k}$, регистрируемую детектором, настроенным на поляризацию $\mathbf{e}$. Действительно, суммирование (23) по поляризациям по формуле [4]

$$\sum_{\lambda=1,2} |(\mathbf{e}_{\lambda}^* \cdot \mathbf{a})|^2 = |[\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{a}]|^2$$

приводит к (1).

Для сравнения результатов классической и квантовой теорий удобно ввести классическое сечение тормозного излучения, разделив эффективное излучение (23) на $\hbar\omega$ [5, 6]:

$$\frac{d\sigma_{\mathbf{ek}}^{cl}(\omega)}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\omega}{4\pi^2 c^2} \int \tilde{\sigma}_0 |(\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{v}_{\omega})|^2 d\Omega_{\mathbf{p}'}. \quad (24)$$

Подынтегральное выражение здесь определяет, очевидно, трижды дифференциальное сечение тормоз-

ного излучения, учитывающее направление рассеяния электрона:

$$\frac{d\sigma^{cl}_{\mathbf{ekp}'}(\omega)}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}} d\Omega_{\mathbf{p}'}} = \frac{e^2}{\hbar c}\frac{\omega}{4\pi^2 c^2}\tilde{\sigma}_0 |(\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{v}_\omega)|^2. \qquad (25)$$

Таким образом, с помощью тензора поляризации удается найти классическое сечение тормозного излучения в рамках максвелловской электродинамики (EH-формализма). Ранее сечение (25) было получено в [7] с помощью гамильтонова формализма классической электродинамики.

4. АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА ТЕНЗОРА ПОЛЯРИЗАЦИИ

Выкладки, которые приводят от тензора поляризации к классическому сечению тормозного излучения, можно обратить. Если подставить разложение вектора поляризации $\mathbf{e}$ по ортам (11) системы координат xyz,

$$\mathbf{e} = \sum_\alpha e_\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha, \qquad (26)$$

в сечение (24), то, отделив множители $e^*_\alpha e_\beta$, получим для компонент тензора поляризации выражение

$$J_{\alpha\beta} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c^3}\int (\boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\omega)(\boldsymbol{\tau}_\beta \cdot \mathbf{v}^*_\omega)\tilde{\sigma}_0 d\Omega_{\mathbf{p}'}. \qquad (27)$$

Скалярные произведения здесь с точностью до множителя совпадают с проекциями $E_{x\omega}$ и $E_{y\omega}$ (14), так что формула (24) приводит для тензора поляризации к выражениям (15), (16), полученным из определения тензора поляризации (8).

Второй способ расчета тензора поляризации применим и при квантовом подходе к описанию тормозного излучения. Дважды дифференциальное квантовое сечение, аналогичное классическому сечению (24), дается выражением [4]

$$\frac{d\sigma_{\mathbf{ek}}(\omega)}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{e^2}{(2\pi)^4\hbar^3 c^3}\frac{p'\omega}{p}\int |(\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{M})|^2 d\Omega_{\mathbf{p}'}. \qquad (28)$$

Здесь

$$\mathbf{M} = -i\hbar\left\langle \psi^{(-)}_{\mathbf{p}'}\right| \nabla \left|\psi^{(+)}_{\mathbf{p}}\right\rangle \qquad (29)$$

— амплитуда перехода между начальным состоянием $\psi^{(+)}_{\mathbf{p}}$ с импульсом $\mathbf{p}$ и асимптотикой расходящихся волн и конечным состоянием $\psi^{(-)}_{\mathbf{p}'}$ с импульсом $\mathbf{p}'$ ($p' = \sqrt{p^2 - 2m\hbar\omega}$) и асимптотикой сходящихся волн на бесконечности. При рассеянии в центральном поле $U = U(r)$ амплитуда $\mathbf{M}$ из тех же соображений симметрии, что и при записи (12), представляется в виде

$$\mathbf{M} = Q_1(p, p', \vartheta)\hat{\mathbf{p}} + Q_2(p, p', \vartheta)\hat{\mathbf{p}}', \qquad (30)$$

где скалярные параметры $Q_{1,2}$ связаны между собой соотношением

$$Q_1(p, p', \vartheta) = Q_2(p', p, \vartheta), \qquad (31)$$

т. е. Q_1 и Q_2 определяются одной комплексной функцией. Находя с помощью сечения (28) главные компоненты тензора поляризации, получим следующие выражения, аналогичные классическим выражениям (16):

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{e^2\omega^2}{16\pi^4\hbar^2 c^3}\frac{p'}{p}A^\perp, \\ J_{22} &= \frac{e^2\omega^2}{16\pi^4\hbar^2 c^3}\frac{p'}{p}(A^\perp \cos^2\theta + 2A^\parallel \sin^2\theta), \end{aligned} \qquad (32)$$

где

$$A^\perp = \int_0^\pi |Q_2|^2 \sin^3\vartheta d\vartheta, \qquad (33)$$

$$A^\parallel = \int_0^\pi |Q_1 + Q_2\cos\vartheta|^2 \sin\vartheta d\vartheta. \qquad (34)$$

Ясно поэтому, что в качественном отношении квантовый расчет приводит к тем же свойствам поляризации тормозного излучения, что и классический. Эти свойства описаны в конце разд. 2.

Из сравнения (28) и (24) следует, что амплитуда тормозного излучения в центральном поле при переходе к классическому пределу распадается на произведение фурье-образа классической скорости и амплитуды упругого рассеяния в классической области. С указанной факторизацией амплитуды согласуется полуклассическая формула Берсона [8] для сечений вынужденных n-фотонных тормозных процессов при рассеянии электрона на силовом центре, в которую сечение упругого рассеяния входит множителем. При $n = 1$ и в слабом линейно поляризованном ($\mathbf{e}^* = \mathbf{e}$) поле формула Берсона эквивалентна (25) (с учетом связи между вынужденными и спонтанными процессами). Однако уже при $n = 2$, как показывает пример кулоновского поля, формула Берсона для слабого поля не совпадает с классическим пределом ($\hbar \to 0$) точных квантовых результатов [9] для двухфотонных тормозных процессов.

5. КУЛОНОВСКОЕ ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Найдем явные выражения для функций f_1, f_2 и Q_1, Q_2, определяющих тензор поляризации в классическом и квантовом случаях, в кулоновской задаче. Из инвариантной формы фурье-образа скорости

$\mathbf{v}_\omega$, которая найдена в [7] по известным проекциям скорости в кеплеровой системе координат [1], следует, что в поле притяжения $U = -Ze^2/r$

$$f_1^C(p,\omega,\vartheta) = f_2^C(p,-\omega,\vartheta) = \\ = i\varepsilon\frac{Ze^2}{mv^2}\exp\left[\frac{\pi}{2}\nu\mathrm{sign}(\omega)\right]\mathrm{sign}(\omega)K_{1+i\nu}(|\nu|\varepsilon), \quad (35)$$

или в явном виде

$$f_1^C(p,\omega,\vartheta) = i\varepsilon\frac{Ze^2}{mv^2}e^{\pi\nu/2}K_{1+i\nu}(|\nu|\varepsilon), \\ f_2^C(p,\omega,\vartheta) = -i\varepsilon\frac{Ze^2}{mv^2}e^{\pi\nu/2}K_{1-i\nu}(|\nu|\varepsilon). \quad (36)$$

Здесь

$$\nu = \frac{Ze^2m^2\omega}{p^3} = \frac{Ze^2\omega}{mv^3}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\sin(\vartheta/2)}, \quad (37)$$

$K_\mu(z)$ — функция Макдональда. Сечение $\tilde\sigma_0$ в (17), (18) есть сечение резерфордовского рассеяния

$$\tilde\sigma_R = \left(\frac{Ze^2}{2mv^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}. \quad (38)$$

Функции f_1^C, f_2^C в поле отталкивания получаются из (36) заменой $Ze^2 \to -Ze^2$, что приводит к появлению дополнительного множителя $e^{-2\pi\nu}$ в формулах для $A^\perp, A^\parallel$.

Квантовая амплитуда (29) кулоновского тормозного излучения в симметричной форме (30) может быть получена преобразованием ее зоммерфельдовского представления [4,10] или при расчете в параболической системе координат (см. [11] и ссылки там). При этом для поля притяжения

$$Q_1^C(p,p',\theta) = Q_2^C(p',p,\theta) = 8\pi\hbar^3\frac{a'p'p}{(p-p')^3}\times \\ \times\exp\left[\frac{\pi}{2}(a'-a)\mathrm{sign}(p-p')\right]\frac{|p-p'|^{ia+ia'}}{(p+p')^{ia+ia'+1}}\times \\ \times\Gamma(2-ia)\Gamma(1-ia')F(2-ia,1-ia',2;z). \quad (39)$$

Здесь

$$a = \frac{Ze^2m}{\hbar p} = \frac{Ze^2}{\hbar v}, \\ a' = \frac{Ze^2m}{\hbar p'} = \frac{Ze^2}{\hbar v'}, \quad (40)$$

$$z = -\frac{2aa'}{(a'-a)^2}(1-\cos\vartheta), \quad (41)$$

$$F(2-ia,1-ia',2;z) \equiv {}_2F_1(2-ia,1-ia',2;z)$$

— гипергеометрическая функция. Амплитуда в поле отталкивания получается из (39)–(41) заменой $Ze^2 \to -Ze^2$, т. е. заменами $a \to -a$, $a' \to -a'$.

Формулы (35) и (39) в соответствии с (16)–(18) и (32)–(34) определяют тензор поляризации $J_{\alpha\beta}$ в классическом и квантовом случаях.

Выясним теперь соотношение между квантовыми и классическими результатами. В [11], формула (30), получены два члена разложения амплитуды $\mathbf{M}$ (29) по $\hbar \to 0$, точнее, в классической области значений переменных задачи:

$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \gg 1, \quad \frac{\hbar\omega}{mv^2/2} \ll 1 \quad (42)$$

(в кулоновском поле притяжения для классичности тормозного излучения достаточно выполнения только первого неравенства [5,6]). Оставляя в этом разложении главный член, получим простое выражение:

$$\mathbf{M} \overset{as}{=} -2ie^{i\gamma}\pi\hbar\sqrt{\tilde\sigma_R}\mathbf{v}_\omega, \quad (43)$$

где $\mathbf{v}_\omega = f_1^C\hat{\mathbf{p}} + f_2^C\hat{\mathbf{p}}'$ — фурье-образ скорости, $\tilde\sigma_R$ — резерфордовское сечение, громоздкое выражение для фазы γ приведено в [11]. Таким образом видим, что в классическом пределе кулоновская амплитуда тормозного излучения факторизуется в соответствии с утверждением в конце предыдущего раздела. Отметим также, что общий множитель $\mathrm{sign}(\omega)$ и модуль в аргументе функций Макдональда, которые введены в (35) «руками» для выполнения условия симметрии (13), строгим образом возникают в (43) при вычислении асимптотики.

Подставляя асимптотическое выражение для амплитуды (43) в (28), получим классическое сечение (24). Такой результат обеспечивает, очевидно, и правильный классический предел при $\hbar \to 0$ для квантового кулоновского тензора поляризации.

Приведем здесь также выражения для параметров $Q_{1,2}$, которые наряду с классическим пределом содержат первую по $\hbar$ поправку к нему:

$$Q_1^{C,app} = e^{i\gamma}\mathcal{A}x\left[K_{1+i\xi}(x) + i\frac{x}{2\sqrt{aa'}}K'_{1+i\xi}(x)\right], \\ Q_2^{C,app} = -e^{i\gamma}\mathcal{A}x\left[K_{1-i\xi}(x) + i\frac{x}{2\sqrt{aa'}}K'_{1-i\xi}(x)\right], \quad (44)$$

где

$$x = \varepsilon\xi, \quad \xi = a'-a, \quad (45)$$

$$\mathcal{A} = \pi Ze^2m\hbar^2e^{\frac{\pi\xi}{2}}\frac{\varepsilon^2}{pp'(p-p')}. \quad (46)$$

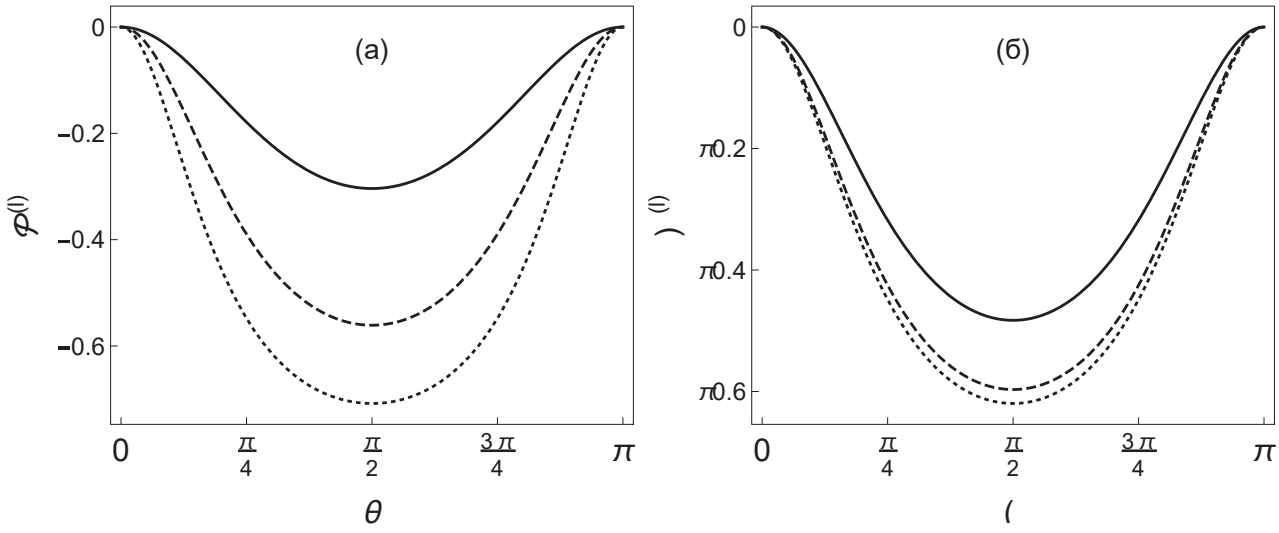

Рис. 2. Степень линейной поляризации $\mathcal{P}^{(l)} = (d\varkappa^{\perp}_{\omega\mathbf{k}} - d\varkappa^{\parallel}_{\omega\mathbf{k}})/(d\varkappa^{\perp}_{\omega\mathbf{k}} + d\varkappa^{\parallel}_{\omega\mathbf{k}})$ как функция угла излучения θ при следующих значениях параметров: *а*) $a = 1$, $\nu = 0.45a$; *б*) $a = 5$, $\nu = 0.45a$. Классический результат — сплошная линия, классический результат с квантовой поправкой — штриховая, квантовый расчет — пунктирная

Явные, но довольно громоздкие выражения для квантовых поправок порядка $\hbar$ к классическим компонентам тензора поляризации нетрудно получить, раскладывая параметры $Q^{app}_{1,2}$ по $\hbar$ с двумя членами.

6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе [12], в которой исследовалось угловое распределение тормозного излучения, кулоновские параметры $A^{\perp}$, $A^{\parallel}$ были аналитически выражены через обобщенные гипергеометрические функции ${}_pF_{p+1}$, с $p = 1, 2, 3$. В [8] аналогичные интегралы выражены через $K_{i\nu}(\nu)$, $K'_{i\nu}(\nu)$, $dK_{\mu}(\nu)/d\mu$ и $dK'_{\mu}(\nu)/d\mu$ (с $\mu = i\nu$). Однако уже сами интегралы (17), (18) с кулоновскими функциями f^C_1, f^C_2 достаточно удобны для аналитического и численного анализа. В Приложении найдены асимптотики параметров $A^{\perp}$ и $A^{\parallel}$ в области низких ($\nu \ll 1$) и высоких ($\nu \gg 1$) частот. Из формул (52), (54) следует, что при низких частотах величины J_{11} и J_{22} логарифмически расходятся и пропорциональны друг другу:

$$J^{lf}_{11} = \frac{Z^2e^6}{m^2v^2c^3}\ln\frac{mv^3}{Ze^2\omega}, \qquad J^{lf}_{22} = J^{lf}_{11}\cos^2\theta, \quad (47)$$

так что степень линейной поляризации в низкочастотном пределе не зависит не только от частоты, но и от энергии частицы:

$$\mathcal{P}^{(l)} = \frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}.$$

Таким образом, низкочастотное излучение преимущественно поляризовано перпендикулярно плоскости испускания, а при угле излучения $\theta = \pi/2$ в пределе $\nu \to 0$ является полностью поляризованным.

Соответствующие результаты в высокочастотной области следуют из формул (59):

$$J^{hf}_{11} = \frac{Z^2e^6}{3\sqrt{3}m^2v^2c^3}, \qquad J^{hf}_{22} = J^{hf}_{11}(1+3\sin^2\theta). \quad (48)$$

Степень линейной поляризации

$$\mathcal{P}^{(l)} = -\frac{3\sin^2\theta}{2+3\sin^2\theta},$$

т. е. высокочастотное излучение поляризовано преимущественно перпендикулярно плоскости испускания, и при $\theta = \pi/2$ в пределе $\nu \to \infty$ степень поляризации достигает максимальной по модулю величины $|\mathcal{P}^{(l)}|_{max} = 3/5$.

На рис. 2 показана зависимость степени линейной поляризации (6) от угла рассеяния, рассчитанная по классическим и квантовым формулам. Общий характер зависимости $\mathcal{P}^{(l)}(\theta)$ соответствует ее описанию в конце разд. 2. В области применимости классической теории наблюдается качественное согласие классических и квантовых результатов. Для применимости классической теории, как и при расчете сечения тормозного излучения [5, 6, 11], достаточно квазиклассичности движения электронов, т. е. выполнения первого неравенства (42); выполнения второго неравенства не требуется, т. е. частота может быть близка к максимальному значению

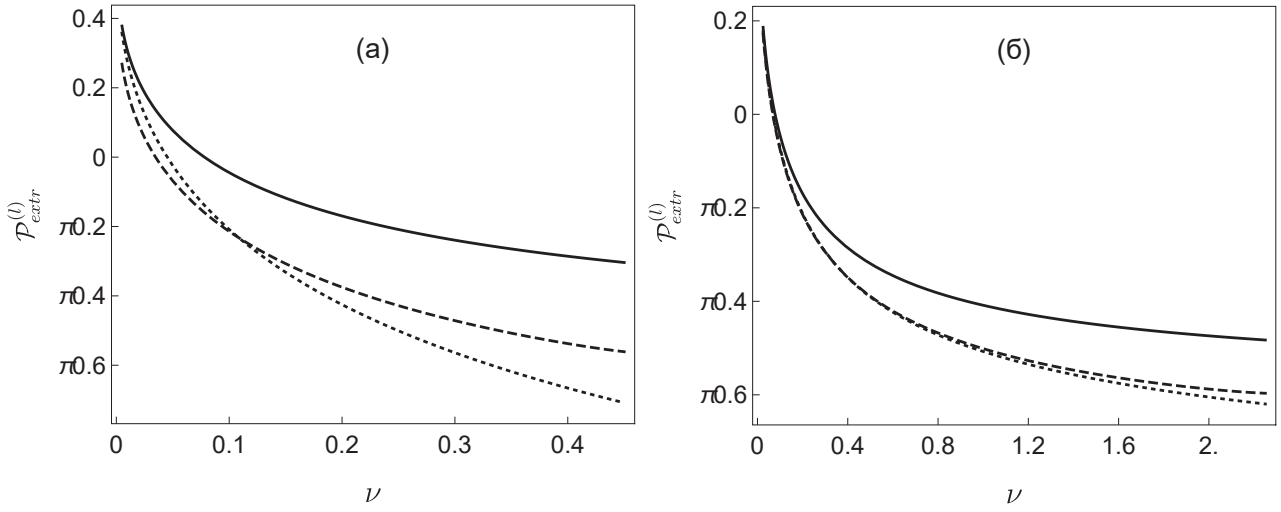

Рис. 3. Экстремальные значения степени линейной поляризации $\mathcal{P}^{(l)}_{extr} = \mathcal{P}^{(l)}(\pi/2)$ как функции параметра ν при значениях параметров: *а*) $a = 1$; *б*) $a = 5$. Классический результат — сплошная линия, классический результат с квантовой поправкой — штриховая, квантовый расчет — пунктирная

$\omega_{max} = mv^2/2\hbar$, допускаемому законом сохранения энергии. Так, на рис. 2 видно, что классические и квантовые значения $\mathcal{P}^{(l)}$ сближаются с увеличением параметра a при частоте $\omega = 0.9\omega_{max}$, причем учет квантовой поправки значительно улучшает классические результаты. Зависимость степени линейной поляризации в точке экстремума $\mathcal{P}^{(l)}_{extr} = \mathcal{P}^{(l)}(\pi/2)$ как функция частоты на интервале $(0, \omega_{max})$ при тех же значениях параметра a, что и на рис. 2, приведена на рис. 3. Величина $\mathcal{P}^{(l)}_{extr}$ монотонно убывает от положительных к отрицательным значениям. Таким образом, при малых частотах, $\omega \ll \omega_{max}$, излучение преимущественно поляризовано перпендикулярно плоскости испускания; при более высоких частотах излучение поляризовано в плоскости испускания.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование тормозного излучения частицы в центральном поле $U(r)$ общего вида возможно только на основе симметрии системы. При этом симметрийный анализ оказывается более продуктивным в применении к фурье-образу скорости частицы (амплитуде тормозного излучения в квантовом случае), а не к сечению процесса, как в [1]. Простая формула (12), выражающая векторный характер фурье-образа скорости $\mathbf{v}_\omega$ и обратимость движения рассеивающейся частицы во времени, позволяет легко найти инвариантные, не зависящие от системы координат, выражения для компонент тензора поляризации и параметров углового распределения тормозного излучения. Очевидно, что выражения (16)–(18) для главных компонент тензора поляризации и аналогичная формула (21) для углового распределения тормозного излучения являются наиболее простыми аналитическими выражениями, которые можно получить для центрального поля без конкретизации его вида.

ПРИЛОЖЕНИЕ. КУЛОНОВСКИЕ ПАРАМЕТРЫ $A^\perp$ И $A^\parallel$ ПРИ НИЗКИХ И ВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

Запишем выражения для кулоновских параметров $A^\perp$ (17) и $A^\parallel$ (18), определяющих тензор поляризации, через интегралы по параметру $\varepsilon = 1/\sin(\vartheta/2)$:

$$A^\perp = 4b^4 e^{\pi\nu} \int\limits_1^\infty \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} \left|K_{1-i\nu}(\nu\varepsilon)\right|^2 d\varepsilon \qquad (49)$$

и

$$A^\parallel = b^4 e^{\pi\nu} \times \\ \times \int\limits_1^\infty \varepsilon^3 \left|K_{1+i\nu}(\nu\varepsilon) - (1 - 2\varepsilon^{-2}) K_{1-i\nu}(\nu\varepsilon)\right|^2 d\varepsilon, \quad (50)$$

где $b = Ze^2/mv^2$. Найдем сначала их низкочастотную асимптотику, $\nu \ll 1$. Переходя в (49) к новой

переменной интегрирования $x = \nu\varepsilon$, получаем интеграл, расходящийся на нижнем пределе при $\nu \to 0$:

$$A^{\perp} = 4b^4 e^{\pi\nu} \int\limits_{\nu}^{\infty} \frac{x^2/\nu^2 - 1}{x} \left|K_{1-i\nu}(x)\right|^2 dx. \qquad (51)$$

Упрощая подынтегральную функцию в области $x \sim \nu$, в которой $K_{1-i\nu}(x) \sim 1/x$, находим с логарифмической точностью главный член асимптотики

$$A^{\perp,lf} = -4\left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^4 \frac{\ln\nu}{\nu^2}. \qquad (52)$$

Теперь, используя рекуррентное соотношение

$$K_{1+i\nu}(x) - K_{1-i\nu}(x) = 2i\frac{\nu}{x}K_{i\nu}(x),$$

и положив после этого $\nu = 0$ в индексах функций Макдональда, получим для $A^{\parallel}$ упрощенное выражение:

$$A^{\parallel} \approx 4b^4\nu^{-2} \int\limits_{\nu}^{\infty} x[K_0^2(x) + \frac{\nu^2}{x^2}K_1^2(x)]dx. \qquad (53)$$

Распространяя в первом слагаемом интегрирование до нуля на нижнем пределе, получим табличный интеграл [13] (см. формулу (6.576.4)); предел $\nu \to 0$ во втором слагаемом вычисляется так же, как в (51). Окончательно

$$A^{\parallel,lf} = 4b^4\nu^{-2}. \qquad (54)$$

Таким образом, в низкочастотной области параметр $A^{\parallel}$ имеет логарифмическую малость по отношению к $A^{\perp}$.

Высокочастотную, $\nu \gg 1$, асимптотику параметров $A^{\perp}, A^{\parallel}$ тоже можно найти из (49), (50), представив функции Макдональда в интегральной форме и учитывая их экспоненциальную малость при больших аргументах. Однако прямые вычисления можно обойти и проиллюстрировать происхождение излучения высоких частот следующим образом. Используя связь векторов $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{p}}'$ с ортами кеплеровой системы координат, выразим функции f_1, f_2 через фурье-образы $\dot{\tilde{x}}_\omega$ и $\dot{\tilde{y}}_\omega$ компонент скорости в кеплеровой системе:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2-1}}\dot{\tilde{y}}_\omega - \frac{\varepsilon}{2}\dot{\tilde{x}}_\omega, \\ f_2 &= \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2-1}}\dot{\tilde{y}}_\omega + \frac{\varepsilon}{2}\dot{\tilde{x}}_\omega. \end{aligned} \qquad (55)$$

Подставив (55) и (38) в (17) и (18) и учитывая, что вклад в интеграл определяется областью $\varepsilon \gtrsim 1$, получим простые приближенные выражения

$$\begin{aligned} A^{\perp} &\approx b^2 \int\limits_{1}^{\infty} |\dot{\tilde{y}}_\omega|^2 \varepsilon d\varepsilon, \\ A^{\parallel} &\approx b^2 \int\limits_{1}^{\infty} |\dot{\tilde{x}}_\omega|^2 \varepsilon d\varepsilon. \end{aligned} \qquad (56)$$

Высокие частоты излучаются частицами, которые имеют малые прицельные параметры и движутся по траекториям, близким к кулоновскому центру [5,6]. Полной энергией таких частиц можно пренебречь по сравнению с максимальной кинетической энергией вблизи центра, т. е. считать, что частица движется по параболе. Закон движения заряда по параболе, заданный в параметрической форме [14]:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{mp^3}{Ze^2}}\frac{\eta}{2}\left(1 + \frac{\eta^2}{3}\right), \\ \tilde{x} &= \frac{p}{2}(1-\eta^2), \quad \tilde{y} = p\eta, \quad -\infty < \eta < \infty, \end{aligned} \qquad (57)$$

где $p = \rho^2/b$, позволяет найти фурье-образы компонент скорости [15]:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_\omega &= \frac{2p}{\sqrt{3}}K_{2/3}\left(\frac{\omega}{3}\sqrt{\frac{mp^3}{Ze^2}}\right), \\ \dot{\tilde{y}}_\omega &= \frac{2p}{\sqrt{3}}K_{1/3}\left(\frac{\omega}{3}\sqrt{\frac{mp^3}{Ze^2}}\right). \end{aligned} \qquad (58)$$

Подставляя (58) в (56) и переходя к интегрированию по прицельному параметру,

$$b^2 \int\limits_{1}^{\infty} \ldots \varepsilon d\varepsilon = \int\limits_{0}^{\infty} \ldots \rho d\rho,$$

найдем высокочастотные значения $A^{\perp}$ и $A^{\parallel}$:

$$\begin{aligned} A^{\perp,hf} &= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\frac{b^2}{\omega^2}, \\ A^{\parallel,hf} &= \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}\frac{b^2}{\omega^2}. \end{aligned} \qquad (59)$$

Выражения (52), (54), (59) в точности соответствуют главным членам разложений параметров σ и a_2 в [12], полученных на основе аналитических выражений; в [12] приведены также несколько следующих членов низко- и высокочастотной асимптотики.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках Госзадания по проекту FZGU-2023-0007.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (1988).

2. L. Kim and R. H. Pratt, Phys. Rev. A **36**, 45 (1987).

3. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Наука, Москва (1970).

4. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).

5. V. I. Kogan, A. B. Kukushkin, and V. S. Lisitsa, Phys. Rep. **213**, 1 (1992).

6. В. И. Коган, УФН **170**, 1351 (2000).

7. A. A. Krylovetsky, N. L. Manakov, S. I. Marmo, and A. F. Starace, Phys. Rev. A **72**, 035401 (2005).

8. И. Я. Берсон, ЖЭТФ **80**, 1727 (1981).

9. Н. Л. Манаков, С. И. Мармо, А. Г. Файнштейн, ЖЭТФ **108**, (1995).

10. А. Зоммерфельд, *Строение атома и спектры*, т. 2, Гостехиздат, Москва (1956).

11. Н. Л. Манаков, А. А. Крыловецкий, С. И. Мармо, ЖЭТФ **148**, 835 (2015).

12. V. Florescu, V. Steiner, and L. Burlacu, J. Phys. B **23**, 427 (1987).

13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).

14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Физматлит, Москва (1973).

15. H. A. Kramers, Phil. Mag. **46**, 836 (1923).