

# ЗАКОН ДИСПЕРСИИ ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОНОВ ПРИ УЧЕТЕ МНОГОФОТОННЫХ ПЕРЕХОДОВ

*О. В. Коровай<sup>a\*</sup>, Д. А. Марков<sup>b</sup>, Л. Ю. Надъкин<sup>b</sup>*

<sup>a</sup> *Севастопольский государственный университет  
299053, Севастополь, Россия*

<sup>b</sup> *Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко  
MD-3300, Тирасполь, Молдова*

Поступила в редакцию 10 марта 2024 г.,  
после переработки 17 июля 2024 г.  
Принята к публикации 31 июля 2024 г.

Изучены особенности законов дисперсии экситон-поляритонов, взаимодействующих с тремя импульсами когерентного лазерного излучения с частотами, находящимися в резонансе с оптически разрешенными однофотонными переходами между уровнями  $1 \rightleftharpoons 2$ ,  $2 \rightleftharpoons 3$  и  $3 \rightleftharpoons 4$ , которые возбуждают экситоны, биэкситоны и триэкситоны, двухфотонными переходами возбуждения биэкситонов  $1 \rightleftharpoons 3$  и триэкситонов  $2 \rightleftharpoons 4$ , а также прямым трехфотонным переходом возбуждения триэкситонов  $1 \rightleftharpoons 4$ . Используется приближение заданной плотности фотонов двух импульсов по сравнению с плотностями экситонов, биэкситонов и триэкситонов. Показано, что закон дисперсии состоит из четырех ветвей, положение и форма которых определяется частотами Раби указанных переходов и плотностями фотонов трех импульсов. Непосредственный учет всех шести оптических переходов приводит к зависимости закона дисперсии экситон-поляритонов от квантовых параметров — разностей фаз между частотами Раби рассматриваемых переходов. Найдены значения параметров, при которых возможны пересечения ветвей закона дисперсии.

DOI: 10.31857/S0044451025020014

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Поляритонная фотоника — ключевая технология для многих технологий передачи информации в квантовых сетях [1] и реализации элементов квантовой памяти [2, 3]. С момента открытия полиэкситонов [4] и в течение последних десятилетий теоретически и экспериментально исследуются экситонные эффекты в полупроводниках [5, 6] и различных полупроводниковых структурах — микрорезонаторах [7], квантовых точках [8–13]. Наличие экситонов, биэкситонов, триэкситонов и мультиэкситонных состояний [14] и возможность селективного управления их свойствами под действием когерентного лазерного излучения во многом определяют оптические характеристики полупроводниковых структур и, следовательно, стимулируют развитие передовых исследований в различных областях:

квантовой обработки информации, создания энергоэффективных электронных устройств, конфокальной микроскопии, поляритонной генерации, бозе-эйнштейновской конденсации. Обнаружение экситонов с большими квантовыми числами [15], которые являются аналогами ридберговских атомов, позволяют изучать новые эффекты, которые не наблюдаются в физике атомов, так как энергии связи ридберговских состояний экситона малы и экситоны более чувствительны к воздействию внешних электрических и магнитных полей. Поэтому при изменении интенсивности внешнего поля можно наблюдать многообразие сдвигов и пересечений уровней.

В ряде работ исследуются потенциальные возможности увеличения генерации квантово-коррелированных фотонов, излучаемых квантовыми точками, с использованием мультиэкситонов более высокого порядка — триэкситонов [16], и тонкие структуры триэкситонных состояний в квантовых точках [17, 18]. Одним из наиболее исследуемых вопросов квантовой оптики является взаимодействие мультиэкситонов с электромагнитным полем в

\* E-mail: olesya-korovai@mail.ru

режиме сильной связи при изменяющихся частотах Раби [19–21].

Наиболее многообещающей системой для исследования эффектов сильной связи являются полупроводниковые экситонные поляритоны [22, 23]. Наличие в такой системе расщеплений Раби приводит к возникновению верхних и нижних поляритонов [24] и обнаружению разнообразных нелинейно-оптических явлений, известных как сверхтекучесть [25], бистабильность [26], слабая фотонная блокада [27], когерентное управление нелинейным поглощением интенсивных лазерных полей [28], интерференция между пиками Аутлера–Таунса (или одетыми состояниями) [29]. В ряде работ исследуется возникновение в законе дисперсии дополнительных поляритонных ветвей, обусловленных образованием биэкситонных и триэкситонных состояний в связанных тримерах и тетрамерах [30, 31], изменение спектра пропускания оптического резонатора, связанного с ансамблем холодных атомов Rb-85 [32], формирование поляритонов темного состояния [33], влияние атомной когерентности на поглощение [34], нерезонансно управляемую конденсацию и генерацию поляритонов в четырехуровневой системе [35].

Эти эффекты изучаются в различных режимах возбуждения электромагнитным полем поляритонов в полупроводниковых и атомных структурах — однофотонных [36], двухфотонных [37–40], трехфотонных [41, 42], либо при одновременном учете однофотонных и многофотонных переходов. В [43] изучено влияние учета однофотонных и многофотонных переходов на поглощение и возможность управления спектром поглощения при помощи изменения интенсивности полей и расстройке резонанса, а также исследованы законы дисперсии многоуровневых систем, с образованием атомных поляритонов: трехуровневого атома с эквидистантным и неэквидистантным энергетическими спектрами при учете двухфотонного перехода [44, 45], четырехуровневого атома с неэквидистантным и эквидистантным энергетическими спектрами при одновременном учете однофотонных, двухфотонных и трехфотонных переходов [46, 47].

Известно, что в трехуровневой системе имеют место индуцированные светом однофотонные переходы из основного состояния кристалла в экситонное и из экситонного в биэкситонное, а также прямой двухфотонный переход из основного состояния кристалла на биэкситонный уровень, характеризующиеся гигантскими силами осциллятора по сравнению с экситонным переходом [48]. В [49] представлены результаты исследования двухимпульсного взаи-

модействия с экситонами и биэкситонами в условиях мощной накачки в области  $M$ -полосы люминесценции. В [50] представлены результаты теоретических исследований эффекта Аутлера–Таунса при падении двух мощных импульсов лазерного излучения, взаимодействующих с биэкситонами и триэкситонами, и пробного импульса на частоте экситонного перехода, показано, что даже при незначительных энергиях связи триэкситона происходит расщепление экситонного состояния на три квазиуровня.

Из представленного краткого обзора литературы видно, что исследование особенностей когерентных нелинейно-оптических явлений с образованием экситон-поляритонных состояний [51, 52] закрепили систему экситон-поляритонов как платформу для дальнейших исследований. Поэтому исследование особенностей поведения законов дисперсии экситонного уровня с одновременным учетом однофотонных и многофотонных переходов — двухфотонного возбуждения биэкситонов и триэкситонов и трехфотонного возбуждения триэкситонов, вызывает интерес как с теоретической, так и с прикладной точки зрения, из-за возможности реализации контроля и управления процессами взаимодействия света с материальными возбуждениями среды и вследствие этого является актуальной задачей.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Ниже представлены результаты исследований трехимпульсного взаимодействия с экситонами, биэкситонами и триэкситонами в полупроводниках. Пусть на среду падают три ультракоротких импульса резонансного лазерного излучения с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  (рис. 1). Предполагается, что длительности импульсов намного меньше времен релаксации экситонов, биэкситонов и триэкситонов (времена релаксации в рассматриваемой модели составляют порядка  $1 \div 10$  пс). В этом случае процессами релаксации можно пренебречь, так как они не успевают срабатывать за время действия импульсов. Если в начальный момент времени кристалл находился в основном состоянии (экситоны, биэкситоны и триэкситоны в нем отсутствовали), то под действием трех ультракоротких импульсов в кристалле создается начальная концентрация фотонов с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , которые генерируют экситоны, биэкситоны и триэкситоны и одновременно взаимодействуют с ними. При этом учитываются однофотонные переходы между уровнями  $1 \rightleftharpoons 2$ ,  $2 \rightleftharpoons 3$  и  $3 \rightleftharpoons 4$ ,

которые возбуждают экситоны, биэкситоны и триэкситоны, благодаря процессам оптической конверсии, двухфотонные переходы возбуждения биэкситонов  $1 \rightleftharpoons 3$  и триэкситонов  $2 \rightleftharpoons 4$ , а также прямой трехфотонный переход возбуждения триэкситонов  $1 \rightleftharpoons 4$ . Насколько нам известно, до сих пор не рассматривалось одновременное действие однофотонных, двухфотонных и трехфотонного процессов. При этом в кристалле устанавливается нестационарный режим изменения плотностей экситонов, фотонов, биэкситонов и триэкситонов.

Гамильтониан однородно распределенных в кристалле экситонов, фотонов, биэкситонов и триэкситонов запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} H = & \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Omega_0 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_T \hat{T}^\dagger \hat{T} + \omega_1 \hat{c}_1 \hat{c}_1^\dagger + \omega_2 \hat{c}_2 \hat{c}_2^\dagger + \\ & + \omega_3 \hat{c}_3 \hat{c}_3^\dagger - g \hat{a}^\dagger \hat{c}_1 - g^* \hat{c}_1^\dagger \hat{a} - \sigma_1 \hat{b}^\dagger \hat{a} \hat{c}_2 - \sigma_1^* \hat{a}^\dagger \hat{c}_2^\dagger \hat{b} - \\ & - \sigma_2 \hat{T}^\dagger \hat{b} \hat{c}_3 - \sigma_2^* \hat{b}^\dagger \hat{c}_3^\dagger \hat{T} - \mu_1 \hat{b}^\dagger \hat{c}_1 \hat{c}_2 - \mu_1^* \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2^\dagger \hat{b} - \\ & - \mu_2 \hat{T}^\dagger \hat{a} \hat{c}_2 \hat{c}_3 - \mu_2^* \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_3^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{T} - \mu \hat{T}^\dagger \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{c}_3 - \mu^* \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_3^\dagger \hat{T}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\omega_0$ ,  $\Omega_0$  и  $\omega_T$  — собственные частоты экситонного, биэкситонного и триэкситонного состояний соответственно,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  — частоты фотонов,  $g(g^*)$  — константа экситон-фотонного взаимодействия,  $\sigma_1(\sigma_1^*)$  — константа оптической экситон-биэкситонной конверсии,  $\sigma_2(\sigma_2^*)$  — константа оптической биэкситон-триэкситонной конверсии,  $\mu_1(\mu_1^*)$  — константа двухфотонной генерации биэкситонов из основного состояния кристалла,  $\mu_2(\mu_2^*)$  — константа двухфотонной генерации триэкситонов из экситонного состояния,  $\mu(\mu^*)$  — константа триэкситон-фотонного взаимодействия,  $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$ ,  $\hat{b}(\hat{b}^\dagger)$ ,  $\hat{T}(\hat{T}^\dagger)$ ,  $\hat{c}_i(\hat{c}_i^\dagger)$  ( $i = 1 \div 3$ ) — операторы уничтожения (рождения) экситонов, биэкситонов, триэкситонов и фотонов соответственно. В отличие от работы [43] константы взаимодействий учтенных переходов в уравнении (1) записаны в комплексном виде, это связано с тем, что все константы рассматриваемых переходов рассчитываются в различных порядках теории возмущений, это позволяет не учитывать возможную смену знака перед слагаемыми, описывающими переходы ( $g(g^*)$ ,  $\sigma_1(\sigma_1^*)$ ,  $\sigma_2(\sigma_2^*)$  — в первом порядке теории возмущений,  $\mu_1(\mu_1^*)$ ,  $\mu_2(\mu_2^*)$  — во втором порядке теории возмущений, а  $\mu(\mu^*)$  — в третьем порядке теории возмущений). Использование констант в комплексной форме позволяет учитывать их одновременно в одном гамильтониане. Отметим, что процессы оптической экситон-биэкситонной конверсии и двухфотонного

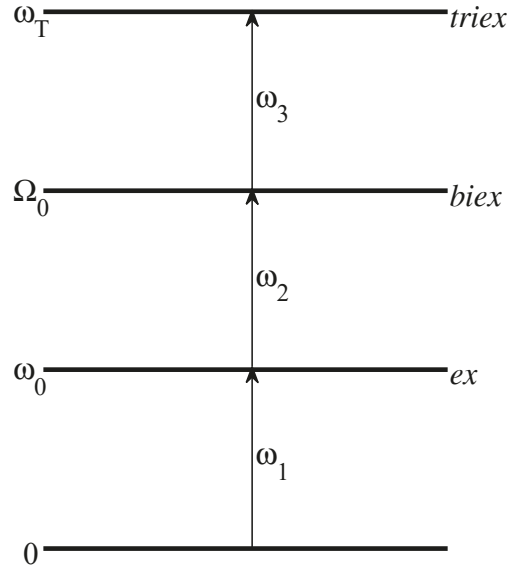


Рис. 1. Схема энергетического спектра полупроводника, взаимодействующего с фотонами с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . ( $\omega_0$ ,  $\Omega_0$  и  $\omega_T$  — собственные частоты экситонного, биэкситонного и триэкситонного состояний, а 0 — основное состояние кристалла)

возбуждения биэкситонов, описываемые константами  $\sigma_1$  и  $\mu_1$ , характеризуются гигантскими силами осциллятора [48, 53].

Используя (1), легко получить систему гейзенберговских уравнений движения для операторов

$$\hat{a}(\hat{a}^\dagger), \hat{b}(\hat{b}^\dagger), \hat{T}(\hat{T}^\dagger), \hat{c}_i(\hat{c}_i^\dagger), \quad i = 1, 2, 3.$$

В приближении среднего поля после усреднения гейзенберговских уравнений для операторов для амплитуд

$$a = \langle \hat{a} \rangle, b = \langle \hat{b} \rangle, T = \langle \hat{T} \rangle, c_i = \langle \hat{c}_i \rangle, \quad i = 1, 2, 3,$$

получаем систему нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} i\dot{a} = & \omega_0 a - g c_1 - \sigma_1^* c_2^* b - \mu_2^* c_2^* c_3^* T, \\ i\dot{b} = & \Omega_0 b - \sigma_1 a c_2 - \sigma_2^* c_3^* T - \mu_1 c_1 c_2, \\ i\dot{T} = & \omega_T T - \sigma_2 b c_3 - \mu_2 a c_2 c_3 - \mu c_1 c_2 c_3, \\ i\dot{c}_1 = & \omega_1 c_1 - g^* a - \mu_1^* c_2^* b - \mu^* c_2^* c_3^* T, \\ i\dot{c}_2 = & \omega_2 c_2 - \sigma_1^* a^* b - \mu_1^* c_1^* b - \mu_2^* c_3^* a^* T - \mu^* c_1^* c_3^* T, \\ i\dot{c}_3 = & \omega_3 c_3 - \sigma_2^* b^* T - \mu_2^* c_2^* a^* T - \mu^* c_1^* c_2^* T. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение этих уравнений будем искать в виде  $c_i = c_{0i} e^{-i\omega_i t}$ , где  $c_i$  — начальное значение амплитуд фотонов. В приближении среднего поля и в пределе

заданного поля второго и третьего импульсов видно, что огибающая функций  $c_i(t)$  в приближении заданной плотности фотонов не изменяется со временем:

$$|c_i|^2 = |c_{0i}|^2 = \text{const}, \quad i = 2, 3.$$

Уравнения для  $c_{20}^*b$  и  $c_{20}^*c_{30}^*T$  вместе с уравнениями для амплитуд  $a$  и  $c_1$  из системы (2) образуют систему из четырех дифференциальных уравнений, которая в приближении заданной плотности фотонов является линейной для амплитуд квазичастиц с одной и той же квазиэнергией

$$\hbar\omega_0 \approx \hbar(\Omega_0 - \omega_2) \approx \hbar(\omega_T - \omega_2 - \omega_3),$$

поэтому решения системы будем искать в виде

$$a, c_1, c_{20}^*b, c_{20}^*c_{30}^*T \propto \exp(-i\omega t),$$

где  $\omega$  — искомая собственная частота новых экситон-поляритонов. Тогда для стационарных амплитуд получаем алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_0)a + g c_1 + \sigma_1^*(c_{20}^*b) + \mu_2^*(c_{20}^*c_{30}^*T) &= 0, \\ (\omega - \omega_1)c + g^*a + \mu_1^*(c_{20}^*b) + \mu(c_{20}^*c_{30}^*T) &= 0, \\ (\omega - \bar{\omega}_2)(c_{20}^*b) + \sigma_1 f_{20}a + \sigma_2^*(c_{20}^*c_{30}^*T) + \\ &+ \mu_1 f_{20}c_1 = 0, \\ (\omega - \bar{\omega}_3)(c_{20}^*c_{30}^*T) + \sigma_2 f_{30}(c_{20}^*b) + \mu_2 f_{20}f_{30}a + \\ &+ \mu f_{20}f_{30}c_1 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $f_{20}$  и  $f_{30}$  — заданные плотности фотонов действующих импульсов,  $\omega_1 = ck_1$ ,  $k_1$  — волновой вектор фотонов слабого импульса, возбуждающего экситоны из основного состояния кристалла,

$$\bar{\omega}_2 = \Omega_0 - \omega_2, \quad \bar{\omega}_3 = \omega_T - \omega_2 - \omega_3.$$

Полагая в (3) константы

$$\begin{aligned} g &= |g| \exp(i\varphi), \quad \sigma_1 = \sigma_1 c_{20} = |\sigma_1| \exp(i\varphi_1), \\ \sigma_2 &= \sigma_2 c_{30} = |\sigma_2| \exp(i\varphi_2), \\ \mu_1 &= \mu_1 c_{20} = |\mu_1| \exp(i\psi_1), \\ \mu_2 &= \mu_2 c_{20} c_{30} = |\mu_2| \exp(i\psi_2), \\ \mu &= \mu c_{20} c_{30} = |\mu| \exp(i\psi) \end{aligned}$$

и раскрывая детерминант системы уравнений (3), который представляет собой закон дисперсии фотонов слабого импульса в экситонной области спектра

в виде уравнения четвертой степени относительно  $\omega$ , получаем

$$\begin{aligned} &(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_1)(\omega - \bar{\omega}_2)(\omega - \bar{\omega}_3) - \\ &- \Omega_{12}^2(\omega - \bar{\omega}_2)(\omega - \bar{\omega}_3) - \Omega_{23}^2(\omega - \omega_1)(\omega - \bar{\omega}_3) - \\ &- \Omega_{34}^2(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_1) - \Omega_{13}^2(\omega - \omega_0)(\omega - \bar{\omega}_3) - \\ &- \Omega_{24}^2(\omega - \omega_1)(\omega - \bar{\omega}_2) - \Omega_{14}^2(\omega - \omega_0)(\omega - \bar{\omega}_2) + \\ &+ \Omega_{12}^2\Omega_{34}^2 + \Omega_{23}^2\Omega_{14}^2 + \Omega_{13}^2\Omega_{24}^2 + \\ &+ 2\Omega_{13}\Omega_{34}\Omega_{14}(\omega - \omega_0)\cos\vartheta_3 + \\ &+ 2\Omega_{12}\Omega_{23}\Omega_{13}(\omega - \bar{\omega}_3)\cos\vartheta_1 + \\ &+ 2\Omega_{12}\Omega_{14}\Omega_{24}(\omega - \bar{\omega}_2)\cos\vartheta_2 + \\ &+ 2\Omega_{23}\Omega_{34}\Omega_{24}(\omega - \omega_1)\cos\vartheta_4 - \\ &- 2\Omega_{12}\Omega_{23}\Omega_{13}\Omega_{14}\cos(\vartheta_1 - \vartheta_3) - \\ &- 2\Omega_{12}\Omega_{13}\Omega_{23}\Omega_{34}\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) - \\ &- 2\Omega_{23}\Omega_{14}\Omega_{13}\Omega_{24}\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где частоты Раби и разности фаз  $\vartheta_i$  ( $i = 1 \div 4$ ) определены соотношениями

$$\Omega_{12}^2 = g^2, \quad \Omega_{23}^2 = \sigma_1^2 f_{20}, \quad \Omega_{34}^2 = \sigma_2^2 f_{30},$$

$$\Omega_{13}^2 = \mu_1^2 f_{20}, \quad \Omega_{24}^2 = \mu_2^2 f_{20} f_{30}, \quad \Omega_{14}^2 = \mu^2 f_{20} f_{30},$$

$$\vartheta_1 = \varphi + \varphi_1 - \psi, \quad \vartheta_2 = \varphi + \psi_2 - \psi,$$

$$\vartheta_3 = \varphi_2 + \psi_1 - \psi, \quad \vartheta_4 = \varphi_1 + \varphi_2 - \psi_2.$$

На сегодняшний день отсутствуют описанные в литературе рассчитанные значения разностей фаз указанных переходов, но мы можем привести физическую интерпретацию. Фактически, если  $\vartheta_1 = 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , то слагаемые, содержащие константы  $g, \sigma_1, \mu$ , имеют одинаковый знак в гамильтониане, если они равны  $\vartheta_1 = (2n+1)\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , то знаки перед этими слагаемыми разные, а если  $\vartheta_1 = n\pi/2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , то двухфотонное взаимодействие отсутствует. Что касается разностей фаз  $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ , то их значение можно описать аналогично. Второе, третье и четвертое слагаемые в (4) пропорциональны квадратам соответствующих частот Раби либо квадрату модуля соответствующего матричного элемента перехода. Эти три слагаемых описывают последовательные, независимые вклады каждого из однофотонных переходов (экситон-фотонного взаимодействия, оптической экситон-биэкситонной конверсии, оптической биэкситон-триэкситонной конверсии) в дисперсионном уравнении. При этом знаки (либо фазы) соответствующих констант взаимодействия по отношению к другим константам взаимодействия не играют роли. Пятое и шестое слагаемые в (4) описывают последовательные, независимые вклады двухфотонного возбуждения

биэкситонов и триэкситонов. Седьмое слагаемое описывает вклад прямого трехфотонного возбуждения триэкситонов из основного состояния кристалла. Слагаемые с восьмого по десятое определяют вклады, обусловленные корреляцией между однофотонными и многофотонными процессами. Слагаемые с одиннадцатого по четырнадцатое пропорциональны произведениям трех частот Раби (трех констант взаимодействия). Их появление обусловлено одновременным действием (квантовой интерференцией) трех процессов. При этом учет знаков между константами взаимодействия (фазовых соотношений) играет важную роль, так как закон дисперсии зависит еще и от разности фаз между константами соответствующих оптических процессов, вклад этих слагаемых зависит не только от значений частот Раби, но и от значений разности фаз, введенных ранее. Последние три слагаемых учитывают вклад в дисперсионное соотношение квантовой интерференции четырех процессов. Здесь играют роль корреляции между четырьмя константами взаимодействия, обусловленные четырехчастичными процессами. Слагаемые с разностью фаз в (4) являются следствием когерентности процессов взаимодействия фотонов с системой экситонов, биэкситонов и триэкситонов. По этой причине экспериментальное установление особенностей поведения закона дисперсии при одновременном учете всех оптических переходов может способствовать установлению фазовых соотношений между различными константами взаимодействия.

Если в (4) положить

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \mu_1 = \mu_2 = \mu = 0,$$

т.е. пренебречь процессами оптической экситон-биэкситонной и биэкситон-триэкситонной конверсий и двухфотонного возбуждения биэкситонов и триэкситонов, а также трехфотонного возбуждения триэкситонов, то получаем уравнение

$$(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_1) - g = 0,$$

решения которого представляют собой две экситон-поляритонные ветви известного закона дисперсии. Если положить

$$\sigma_2 = \mu_2 = \mu = 0,$$

то получим закон дисперсии экситон-поляритонов, состоящий из трех ветвей в условиях действия сильной накачки в области  $M$ -полосы, ранее изученный в [42]. Если пренебречь многофотонными процессами — двухфотонным возбуждением биэкситонов и

триэкситонов, а также трехфотонным возбуждением триэкситонов, т.е. положить

$$tu_1 = \mu_2 = \mu = 0,$$

то закон дисперсии экситон-поляритонов примет вид

$$\begin{aligned} & (\omega - \omega_0)(\omega - \omega_1)(\omega - \bar{\omega}_2)(\omega - \bar{\omega}_3) - \\ & - \Omega_{12}^2(\omega - \bar{\omega}_2)(\omega - \bar{\omega}_3) - \Omega_{23}^2(\omega - \omega_1)(\omega - \bar{\omega}_3) - \\ & - \Omega_{34}^2(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_1) + \Omega_{12}^2\Omega_{34}^2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражая из (5) волновой вектор  $k_1$  фотона первого импульса, можно в явном виде представить его зависимость от  $\omega$ :

$$\begin{aligned} ck_1 \equiv \omega_1 = \omega - & \left[ \Omega_{12}^2(\omega - \bar{\omega}_2)(\omega - \bar{\omega}_3) - \Omega_{12}^2\Omega_{34}^2 \right] \times \\ & \times \left[ (\omega - \omega_0)(\omega - \bar{\omega}_2)(\omega - \bar{\omega}_3) - \right. \\ & \left. - \Omega_{23}^2(\omega - \bar{\omega}_3) - \Omega_{34}^2(\omega - \omega_0) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим уравнение (6) в условиях точного резонанса второго и третьего импульсов  $\omega = \bar{\omega}_2$  и  $\omega = \bar{\omega}_3$ :

$$ck_1 \equiv \omega_1 = \omega - \frac{\Omega_{12}^2(\omega^2 - \Omega_{34}^2)}{\omega(\omega^2 - \omega\omega_0 - (\Omega_{23}^2 + \Omega_{34}^2))}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что волновой вектор  $k_1$  фотона первого импульса обращается в бесконечность на частотах

$$\begin{aligned} & \omega = 0, \\ & \omega_{\pm} = \frac{1}{2}\omega_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4}\omega_0^2 + (\Omega_{23}^2 + \Omega_{34}^2)}, \end{aligned}$$

которые определяются частотами Раби  $\Omega_{23}$  и  $\Omega_{34}$  однофотонных переходов.

Эти частоты определяют положение трех квазиуровней, которые возникают в результате расщепления экситонного состояния под действием сильного поля первого импульса и являются аналогом известной поперечной частоты  $\omega_{LT}$  экситон-поляритонов. Их существование обусловлено только процессами оптической экситон-биэкситонной и биэкситон-триэкситонной конверсий, тогда как экситон-фотонное взаимодействие не оказывает никакого влияния на положение этих частот. При равенстве частот Раби происходит симметричное расщепление экситонного уровня (рис. 2). Увеличение значения частоты Раби  $\Omega_{23}$  экситон-биэкситонного перехода либо частоты Раби  $\Omega_{34}$  биэкситон-триэкситонного перехода приводит к симметричному смещению частот  $\omega_+$  и  $\omega_-$  друг от друга в коротковолновую и длинноволновую области и, следовательно, к



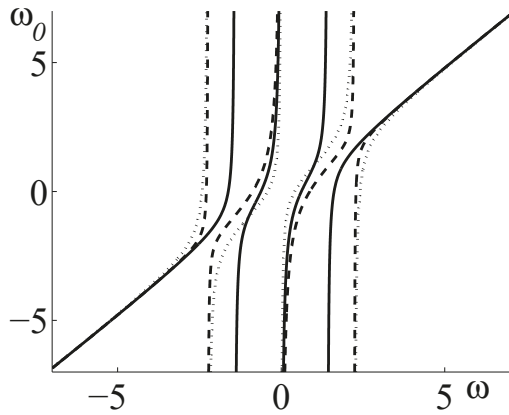


Рис. 2. Законы дисперсии экситон-поляритонов без учета многофотонных переходов в условиях точного резонанса при значениях частот Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$  — сплошные линии,  $\omega_{23} = 1$ ,  $\omega_{34} = 2$  — штриховые,  $\omega_{23} = 2$ ,  $\omega_{34} = 1$  — пунктирные

расталкиванию квазиуровней, что свидетельствует об увеличении расщепления экситонного состояния (рис. 2). Следовательно, чем больше плотности фотонов второго  $f_{20}$  и третьего  $f_{30}$  импульсов, тем больше расходятся частоты  $\omega_+$  и  $\omega_-$  друг от друга.

В отсутствие условий точного резонанса волновой вектор  $k_1$  фотона первого импульса обращается в бесконечность на частотах, которые определяются корнями знаменателя выражения (6), представляющего собой кубическое уравнение относительно  $\omega$ :

$$(\omega - \omega_0)(\omega - \bar{\omega}_2)(\omega - \bar{\omega}_3) - \Omega_{23}^2(\omega - \bar{\omega}_3) - \Omega_{34}^2(\omega - \omega_0) = 0. \quad (8)$$

Корни знаменателя определяют положение трех квазиуровней, т. е. расщепление экситонного состояния, которые зависят не только от значений частот Раби  $\Omega_{23}$  и  $\Omega_{34}$ , но и от расстройок резонансов второго и третьего импульсов  $\bar{\omega}_2$  и  $\bar{\omega}_3$ . Корни уравнения (8) определяются известными выражениями [54]. Анализ дискриминанта уравнения (8) показывает, что при различных значениях расстройок резонанса дискриминант уравнения больше нуля, что означает, что все три корня уравнения различны. На рис. 3 видно, что при изменении расстройок резонансов второго и третьего импульсов  $\bar{\omega}_2$  и  $\bar{\omega}_3$  происходит смещение корней уравнения в длинноволновую (рис. 3 а) или коротковолновую (рис. 3 б) область, что означает смещение квазиуровней расщепленного состояния, а следовательно, в нашем случае, и ветвей закона дисперсии экситон-поляритонов.

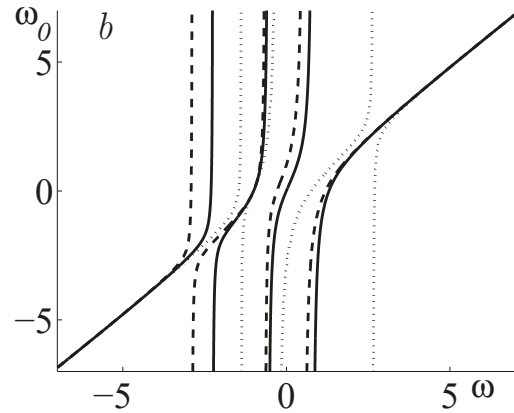
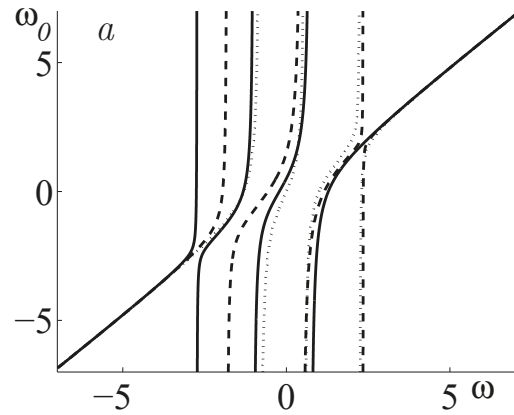


Рис. 3. Законы дисперсии экситон-поляритонов без учета многофотонных переходов, при учете расстройок резонансов  $\delta_2 = \delta_3 = -2$  (а),  $\delta_2 = -2$ ,  $\delta_3 = 2$  (б);  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$  — сплошные линии,  $\omega_{23} = 1$ ,  $\omega_{34} = 2$  — штриховые,  $\omega_{23} = 2$ ,  $\omega_{34} = 1$  — пунктирные

### 3. ЗАКОН ДИСПЕРСИИ ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОНОВ БЕЗ УЧЕТА МНОГОФОТОННЫХ ПЕРЕХОДОВ

Обсудим поведение ветвей закона дисперсии экситон-поляритонов без учета многофотонных переходов. Будем считать, что частота фотонов первого импульса  $\omega_1 = ck_1$ , действующего на частоте возбуждения экситонов из основного состояния кристалла, непрерывно изменяется, тогда как частоты  $\omega_2$  и  $\omega_3$  фотонов второго и третьего импульсов являются фиксированными параметрами.

Введем в рассмотрение расстройки резонансов  $\Delta$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ , нормированные на частоту Раби  $\Omega_{12}$  экситонного состояния:

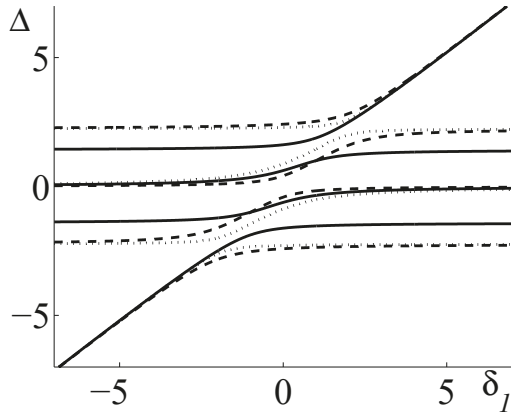


Рис. 4. Законы дисперсии  $\Delta(\delta_1)$  при  $\delta_2 = \delta_3 = 0$  без учета многофотонных переходов  $\omega_{14} = \omega_{24} = \omega_{13} = 0$  и значениях нормированных частот Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = \omega_{12} = 1$  — сплошные линии,  $\omega_{34} = \omega_{12} = 1$ ,  $\omega_{23} = 2$  — штриховые,  $\omega_{23} = \omega_{12} = 1$ ,  $\omega_{34} = 2$  — пунктирные

$$\begin{aligned}\omega - \omega_0 &= \Omega_{12}\Delta, \\ \omega_1 - \omega_0 &= \Omega_{12}\delta_1, \\ \omega_2 - \omega_{03} + \omega_0 &= \Omega_{12}\delta_2, \\ \omega_2 + \omega_{03} - \omega_{04} &= \Omega_{12}\delta_3.\end{aligned}\quad (9)$$

В этом случае дисперсионное уравнение экситон-поляритонов (4) с учетом выражений (9) имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta - \delta_1)(\Delta + \delta_2)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \\ - (\Delta + \delta_2)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \\ - \omega_{23}^2(\Delta - \delta_1)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \\ - \omega_{34}^2\Delta(\Delta - \delta_1) + \omega_{34}^2 = 0,\end{aligned}\quad (10)$$

где  $\omega_{23} = \Omega_{23}/\Omega_{12}$ ,  $\omega_{34} = \Omega_{34}/\Omega_{12}$  — нормированные на  $\Omega_{12}$  частоты Раби однофотонных переходов. Для анализа поведения кривых законов дисперсии экситон-поляритонов более удобным является рассмотрение решения уравнения  $\delta_1(\Delta)$  с учетом расстройек резонансов  $\delta_i$  ( $i = 2, 3$ ). Используя подход, развитый в [44], представим уравнение (10) в виде

$$\delta_1(\Delta) = \Delta - \frac{F(\Delta)}{G(\Delta)},\quad (11)$$

где

$$F(\Delta) = (\Delta + \delta_2)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \omega_{34}^2,\quad (12)$$

$$\begin{aligned}G(\Delta) &= \Delta^3 + \Delta^2(2\delta_2 + \delta_3) + \\ &+ \Delta(\delta_2^2 + \delta_2\delta_3 + \omega_{23}^2 + \omega_{34}^2) - \omega_{23}^2(\delta_2 + \delta_3).\end{aligned}\quad (13)$$

Видно, что поведение функции  $\delta_1(\Delta)$  будет существенно определяться корнями знаменателя

$G(\Delta)$ , который представляет собой каноническое кубическое уравнение  $G(\Delta) = 0$  относительно  $\Delta$ . При этом корни знаменателя будут являться полюсами функции  $\delta_1(\Delta)$ , положение которых будет изменяться в зависимости от значений параметров системы.

Рассмотрим случай точного резонанса  $\delta_2 = \delta_3 = 0$ , тогда выражения (12) и (13) можно записать в виде

$$F(\Delta) = \Delta^2 - \omega_{34}^2,\quad (14a)$$

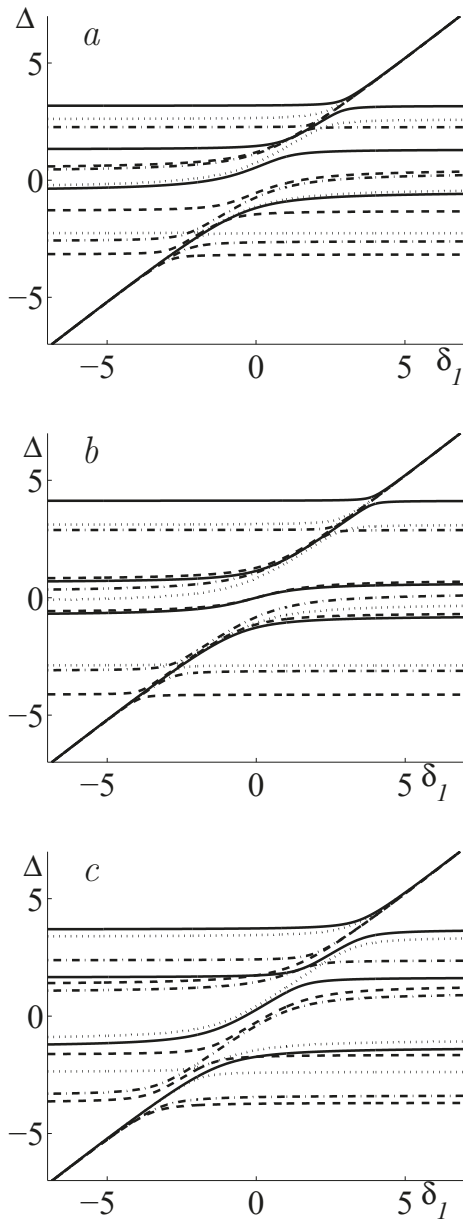
$$G(\Delta) = \Delta^3 - \Delta(\omega_{23}^2 + \omega_{34}^2).\quad (14b)$$

Исследуя  $G(\Delta)$  (14b), изучим поведение ветвей законов дисперсии  $\Delta(\delta_1)$  при различных значениях расстройек резонансов и частот Раби однофотонных переходов. Видно, что закон дисперсии представляет структуру  $\Delta(\delta_1)$ , состоящую из четырех восходящих с ростом  $\delta_1$  зеркально-симметричных ветвей, положение и форма которых определяются значениями частот Раби (рис. 4). При этом корни знаменателя будут определяться выражениями

$$\Delta = 0, \quad \Delta_{\pm} = \pm\sqrt{\omega_{23}^2 + \omega_{34}^2}.\quad (15)$$

Из (15) видно, что положение корней знаменателя будет определяться значениями нормированных частот Раби экситон-биэкситонного перехода  $\omega_{23}$  и биэкситон-триэкситонного перехода  $\omega_{34}$ . При изменении значения  $\omega_{23}$  ветви закона дисперсии экситон-поляритонов изменяют свою форму, происходит сближение средних ветвей друг с другом и одновременно симметричное смещение в длинноволновую и коротковолновую области верхней и нижней ветвей, что свидетельствует об увеличении расщепления экситонного уровня и симметричном смещении расщепленных квазиуровней друг относительно друга (рис. 4). Увеличение значений частоты Раби  $\omega_{34}$  приводит к сильному смещению верхней и нижней ветвей закона дисперсии экситон-поляритонов, при этом средние ветви расталкиваются и наблюдается сильное сближение средней и верхней ветвей и средней и нижней ветвей (рис. 4).

Рассмотрим поведение кривых закона дисперсии (10) в отсутствие условий точного резонанса  $\delta_2 = \delta_3 \neq 0$ . Наличие расстройек резонанса фотонов падающих импульсов относительно собственных частот переходов приводит к смещению корней знаменателя  $G(\Delta)$  (14b), которые являются полюсами функции  $\delta_1(\Delta)$ , и, как следствие, к изменению положений квазиуровней. Кроме того, наличие расстройек резонансов существенно изменяет форму ветвей закона дисперсии экситон-поляритонов.



**Рис. 5.** Законы дисперсии экситон-поляритонов без учета многофотонных переходов  $\omega_{14} = \omega_{24} = \omega_{13} = 0$ , при различных значениях расстройк резонансов второго и третьего импульсов и нормированных частот Раби:  $\delta_2 = \delta_3 = -2$  (a);  $\delta_2 = \delta_3 = 2$  (b);  $\delta_2 = -2$ ,  $\delta_3 = 2$  (c). На всех рисунках тип линии соответствует значениям нормированных изменяющихся частот Раби ( $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$  — сплошные,  $\omega_{23} = 1$ ,  $\omega_{34} = 2$  — штриховые,  $\omega_{23} = 2$ ,  $\omega_{34} = 1$  — пунктирные,  $\omega_{23} = \omega_{34} = 2$  — штрихпунктирные)

На рис. 5 a представлено изменение поведения ветвей закона дисперсии при различных значениях расстройк резонансов второго и третьего импуль-

сов и частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34}$ . Видно, что при  $\delta_2 = \delta_3 = -2$  наблюдается смещение обеих средних ветвей и нижней поляритонной ветви в длинноволновую область  $\Delta < 0$ , при этом нижняя и средняя ветви изменяют свою форму, наблюдается сильное сближение нижней и средней ветвей в области  $\Delta < 0$  (рис. 5 a), что свидетельствует о проявлении эффекта сильной связи в длинноволновой области от частоты экситонного перехода и существенном ослаблении в коротковолновой. Если изменить значение расстройк резонансов второго и третьего импульсов  $\delta_2 = \delta_3 = 2$ , то можно наблюдать возникновение сближения верхней и средней ветвей в коротковолновой области  $\Delta > 0$  от частоты экситонного перехода, происходит существенная перенормировка энергетического спектра, со смещением квазиуровней в область  $\Delta > 0$  (рис. 5 b). При значениях расстройк резонансов  $\delta_2 = -2$  и  $\delta_3 = 2$  наблюдается смещение верхней и средней ветвей, при этом сохраняется сильный поляритонный эффект между этими ветвями в области  $\Delta > 0$  и одновременно наблюдается сближение между средними ветвями в области  $\delta_1 < 0$  (рис. 5 c). Сближение и расталкивание ветвей свидетельствуют об увеличении или ослаблении поляритонного эффекта в зависимости от значений расстройк резонансов падающих импульсов.

#### 4. ЗАКОН ДИСПЕРСИИ ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОНОВ С УЧЕТОМ МНОГОФОТОННЫХ ПЕРЕХОДОВ

Обсудим поведение ветвей закона дисперсии экситон-поляритонов при учете многофотонных переходов, тогда дисперсионное уравнение экситон-поляритонов (4) будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \Delta(\Delta - \delta_1)(\Delta + \delta_2)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \\ & - (\Delta + \delta_2)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \omega_{23}^2(\Delta - \delta_1)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \\ & - \omega_{34}^2\Delta(\Delta - \delta_1) - \omega_{13}^2\Delta(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \\ & - \omega_{24}^2(\Delta - \delta_1)(\Delta + \delta_2) - \omega_{14}^2\Delta(\Delta + \delta_2) + \\ & + \omega_{34}^2 + \omega_{23}^2\omega_{14}^2 + \omega_{13}^2\omega_{24}^2 + 2\Delta\omega_{13}\omega_{34}\omega_{14}\cos\vartheta_3 + \\ & + 2\omega_{23}\omega_{13}(\Delta + \delta_2 + \delta_3)\cos\vartheta_1 + 2\omega_{14}\omega_{24}(\Delta + \delta_2)\cos\vartheta_2 + \\ & + 2\omega_{23}\omega_{34}\omega_{24}(\Delta - \delta_1)\cos\vartheta_4 - 2\omega_{23}\omega_{13}\omega_{14}\cos(\vartheta_1 - \vartheta_3) - \\ & - 2\omega_{13}\omega_{23}\omega_{34}\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) - \\ & - 2\omega_{23}\omega_{14}\omega_{13}\omega_{24}\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0, \quad (16) \end{aligned}$$

где

$$\omega_{23} = \Omega_{23}/\Omega_{12}, \quad \omega_{34} = \Omega_{34}/\Omega_{12}, \quad \omega_{13} = \Omega_{13}/\Omega_{12},$$

$$\omega_{24} = \Omega_{24}/\Omega_{12}, \quad \omega_{14} = \Omega_{14}/\Omega_{12}$$



— нормированные на  $\Omega_{12}$  частоты Раби однофотонных и многофотонных переходов.

Для анализа поведения кривых законов дисперсии экситон-поляритонов более удобным является рассмотрение решения уравнения  $\delta_1(\Delta)$  с учетом расстройек резонансов  $\delta_i$  ( $i = 2, 3$ ). Представим уравнение (16) в виде

$$\delta_1(\Delta) = \Delta - \frac{F(\Delta)}{G(\Delta)}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} F(\Delta) = & \Delta^2(\omega_{14}^2 - \omega_{13}^2 - 1) + \\ & + \Delta(\delta_2(\omega_{14}^2 - \omega_{13}^2 - 2) - \delta_3(\omega_{13}^2 + 1) + \\ & + 2\omega_{14}\omega_{24}\cos\vartheta_1 + 2\omega_{23}\omega_{13}\cos\vartheta_2) + \\ & + 2\delta_2\omega_{14}\omega_{24}\cos\vartheta_1 + \\ & + 2(\delta_2 + \delta_3)\omega_{23}\omega_{13}\cos\vartheta_2 + \\ & + \omega_{23}^2\omega_{14}^2 + \omega_{24}^2\omega_{13}^2 + \omega_{34}^2 - \\ & - 2\omega_{34}\omega_{24}\omega_{13}\cos(\vartheta_1 - \vartheta_4) - \\ & - 2\omega_{14}\omega_{23}\omega_{34}\cos(\vartheta_2 + \vartheta_4) - \\ & - 2\omega_{14}\omega_{23}\omega_{24}\omega_{13}\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\Delta) = & \Delta^3 + (2\delta_2 + \delta_3)\Delta^2 + \\ & + (\delta_2^2 + \delta_2\delta_3 - (\omega_{23}^2 + \omega_{34}^2 + \omega_{24}^2))\Delta + \\ & + 2\omega_{23}\omega_{34}\omega_{24}\cos\vartheta_3 - \\ & - \delta_2(\omega_{23}^2 + \omega_{24}^2) - \delta_3\omega_{34}^2. \quad (19) \end{aligned}$$

Видно, что поведение функции  $\delta_1(\Delta)$  будет существенно определяться корнями знаменателя  $G(\Delta)$ , который представляет собой каноническое кубическое уравнение  $G(\Delta) = 0$  относительно  $\Delta$ . При этом корни знаменателя будут являться полюсами функции  $\delta_1(\Delta)$ , положение которых будет изменяться в зависимости от значений параметров системы.

Рассмотрим случай точного резонанса  $\delta_2 = \delta_3 = 0$ , тогда выражения (18) и (19) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta^2(\omega_{14}^2 - \omega_{13}^2 - 1) + \\ + \Delta(2\omega_{14}\omega_{24}\cos\vartheta_1 + 2\omega_{23}\omega_{13}\cos\vartheta_2) + \\ + \omega_{23}^2\omega_{14}^2 + \omega_{24}^2\omega_{13}^2 + \omega_{34}^2 - \\ - 2\omega_{34}\omega_{24}\omega_{13}\cos(\vartheta_1 - \vartheta_4) - \\ - 2\omega_{14}\omega_{23}\omega_{34}\cos(\vartheta_2 + \vartheta_4) - \\ - 2\omega_{14}\omega_{23}\omega_{24}\omega_{13}\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 - (\omega_{23}^2 + \omega_{34}^2 + \omega_{24}^2)\Delta + \\ + 2\omega_{23}\omega_{34}\omega_{24}\cos\vartheta_3 = 0. \quad (21) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в (21) описывает взаимодействие импульса на частоте  $\omega_2$  с экситонами с квазиэнергией  $\hbar(\Omega_0 - \omega_2)$  с частотой Раби  $\omega_{23}$  (переход  $2 \rightleftharpoons 3$ ), взаимодействие импульса на частоте  $\omega_3$  с биэкситонами с квазиэнергией  $\hbar(\omega_T - \omega_3)$  на переходе  $3 \rightleftharpoons 4$  с частотой Раби  $\omega_{34}$ , взаимодействие импульсов на частотах  $\omega_2$  и  $\omega_3$  с экситонами с квазиэнергией  $\hbar(\omega_T - \omega_3 - \omega_2)$  на переходе  $2 \rightleftharpoons 4$  с частотой Раби  $\omega_{24}$ , третье слагаемое представляет собой квантовую интерференцию трех процессов. При этом слагаемые, пропорциональные  $\omega_{23}$  и  $\omega_{34}$ , описывают однофотонные переходы, тогда как третье слагаемое — это следствие учета процесса двухфотонного возбуждения триэкситонов  $2 \rightleftharpoons 4$ . Положение корней знаменателя, которые являются поперечными частотами экситон-поляритонов, т. е. расщепление экситонного состояния, определяется тремя частотами Раби и разностью фаз  $\vartheta_3$ . Очевидно, что если одна из этих частот Раби равна нулю либо разность фаз  $\vartheta_3 = \pi/2$ , то слагаемое, описывающее квантовую интерференцию трех процессов, равно нулю.

Изучим поведение корней уравнения (21) при различных значениях частот Раби и разности фаз  $\vartheta_3$ . При  $\vartheta_3 = \pi/2$  уравнение имеет три различных корня:

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_{2,3} = \pm \sqrt{\omega_{23}^2 + \omega_{34}^2 + \omega_{24}^2},$$

положение которых определяется значениями всех частот Раби, входящих в уравнение. В случае  $\omega_{23} = \omega_{34} = \omega_{24}$  положение корней  $\Delta_{2,3}$  будет определяться только одной частотой Раби. При  $\vartheta_3 = 0, \pi$  уравнение (21) имеет три различных корня при условии  $\omega_{23} \neq \omega_{34} \neq \omega_{24}$ . Решение кубического уравнения (21) в общем случае можно представить в виде [54]

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \frac{-a}{3} + 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}, \\ \Delta_{2,3} = \frac{-a}{3} + 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\alpha \pm \pi}{3}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\cos \alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}},$$

$$p = \frac{-1}{3}a^2 + b, \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c,$$

а коэффициенты в условиях точного резонанса будут иметь следующий вид:

$$a = 1, \quad b = \omega_{23}^2 + \omega_{34}^2 + \omega_{24}^2, \quad c = 2\omega_{23}\omega_{34}\omega_{24}\cos\vartheta_3.$$

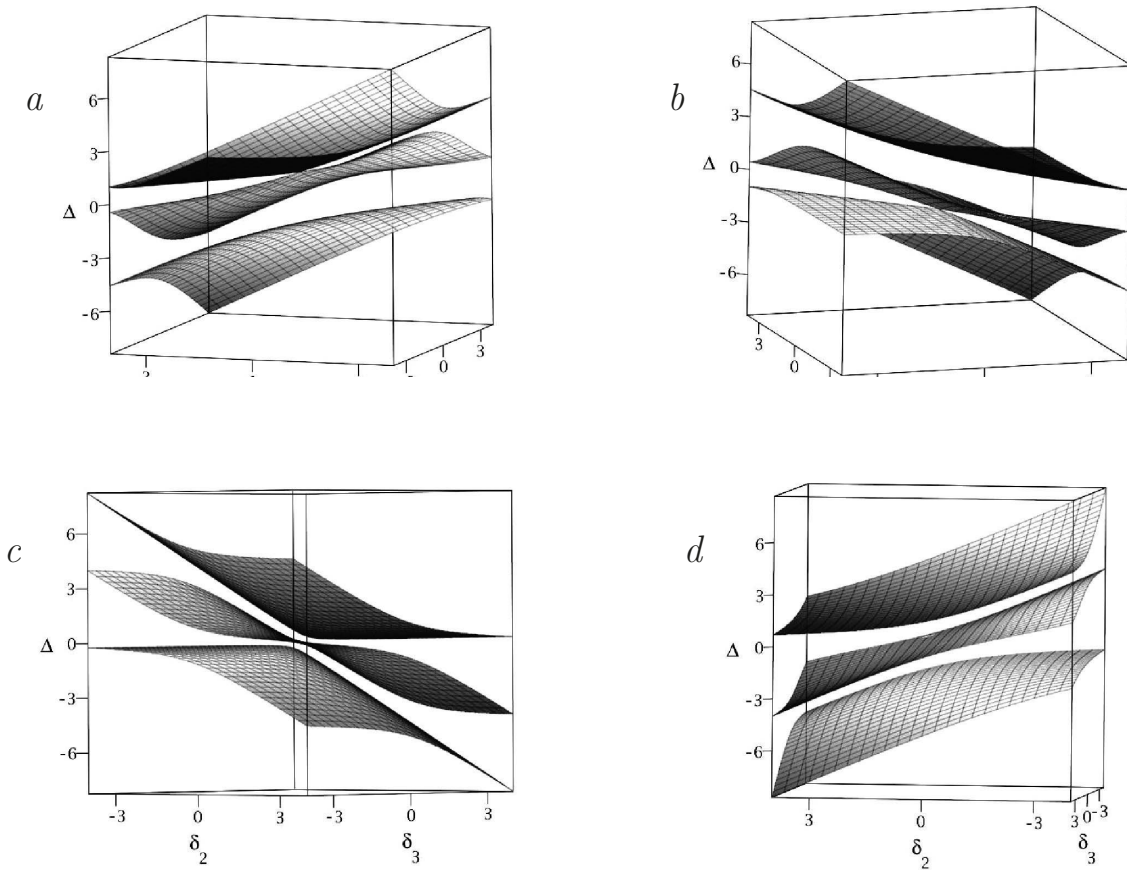


Рис. 6. Зависимости корней уравнения  $\Delta(\delta_2, \delta_3)$ : при разности фаз  $\vartheta_i = 0$  ( $i = 1 \div 4$ ),  $\omega_{23} = \omega_{34} = \omega_{24} = 1$  (a); при разности фаз  $\vartheta_i = \pi$ ,  $\omega_{23} = \omega_{34} = \omega_{24} = 1$  (b);  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$ ,  $\omega_{24} = 0$  (c); при разности фаз  $\vartheta_i = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega_{23} = \omega_{34} = \omega_{24} = 1$  (d)

Наличие вырождения корней можно определить, исследуя дискриминант уравнения (18)

$$D = -108\omega_{23}^2\omega_{24}^2\omega_{34}^2\cos^2\vartheta_3 - 4(-\omega_{23}^2 - \omega_{24}^2 - \omega_{34}^2)^3.$$

Видно, что дискриминант и, следовательно, корни уравнения (21) будут определяться частотами Раби и разностью фаз  $\vartheta_3$ , входящей в интерференционное слагаемое всех трех процессов. Анализ дискриминанта уравнения позволяет сделать вывод, что при  $|\cos^2\vartheta_3| = 1$  и  $\omega_{23} = \omega_{34} = \omega_{24}$  имеем  $D = 0$  и, следовательно, уравнение (21) имеет один двукратно вырожденный корень и один отличный от него. Отсюда следует, что при учете процесса двухфотонного возбуждения триэкситонов происходит вырождение корней, которое в нашем случае проявляется в возникновении пересечения ветвей закона дисперсии экситон-поляритонов.

Энергетическая схема процесса возбуждения триэкситонов является частным случаем энергетической схемы четырехуровневого атома с неэквидистантным энергетическим спектром. Результаты, полученные в условиях точного резонанса, согласуются с результатами, полученными в работе [46].

Рассмотрим влияние расстройк резонансов на поведение ветвей закона дисперсии экситон-поляритонов, возникающих при трехфотонном возбуждении триэкситонов из основного состояния кристалла.

Проанализируем поведение корней в зависимости от значений расстройк резонанса и разности фаз  $\vartheta_3$ . На рис. 6 a, b видно, что при  $\vartheta_3 = 0$  (рис. 6 a) либо  $\vartheta_3 = \pi$  (рис. 6 b) и при условии равенства частот Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = \omega_{24}$  наблюдается пересечение корней уравнения  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  в точке  $\delta_2 = \delta_3 = 0$  в коротко-

волновой  $\Delta > 0$  (рис. 6 а) и корней уравнения  $\Delta_1$  и  $\Delta_3$  в длинноволновой  $\Delta < 0$  областях (рис. 6 б), наличие точек пересечений обусловлено вырождением корней кубического уравнения (21). При увеличении значений расстройек резонансов второго и третьего импульсов  $\delta_2$  и  $\delta_3$  наблюдается три корня уравнения, смещающихся друг относительно друга, что свидетельствует об увеличении расщепления возбужденного экситон-поляритонного состояния и смещении расщепленных квазиуровней друг относительно друга в коротковолновую и длинноволновую области. Если положить  $\omega_{24} = 0$  (рис. 6 с), т. е. исключить учет двухфотонного перехода  $2 \leftrightarrow 4$  возбуждения триэкситонов, то наблюдается симметричное смещение корней кубического уравнения друг относительно друга при изменении расстройек резонансов обоих импульсов. При разности фаз  $\vartheta_3 = \frac{\pi}{2}$  складываемое, описывающее квантовую интерференцию трех процессов, равно нулю. В этом случае положение трех корней будет определяться значениями частот Раби и расстройек резонансов второго и третьего импульсов. Видно, что при значениях расстройек резонансов, отличных от нуля, уравнение (21) имеет три различных корня, которые при увеличении значений расстройек резонанса симметрично удаляются друг от друга, при этом увеличение значения частоты Раби  $\omega_{24}$  приводит к увеличению смещения корней друг относительно друга, что свидетельствует об увеличении расщепления экситон-поляритонного состояния и смещении квазиуровней (рис. 6 d). Эти особенности поведения корней уравнения (21) в зависимости от значений частот Раби, расстройек резонансов второго и третьего импульсов  $\delta_2 \neq 0$  и  $\delta_3 \neq 0$

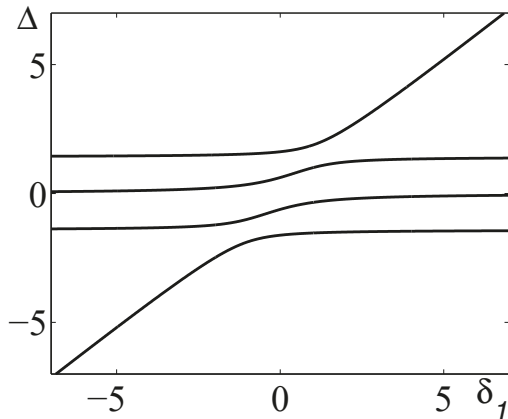


Рис. 7. Закон дисперсии  $\Delta(\delta_1)$  при  $\delta_2 = \delta_3 = 0$  и значениях нормированных частот Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$ , без учета многофотонных переходов  $\omega_{13} = \omega_{24} = \omega_{14} = 0$

и разности фаз должны проявиться и в поведении ветвей закона дисперсии  $\Delta(\delta_1)$ .

Изучим решения уравнения четвертой степени (16) как функцию  $\Delta(\delta_1)$  при постоянных значениях параметров  $\omega_{23}$ ,  $\omega_{34}$ ,  $\omega_{13}$ ,  $\omega_{24}$ ,  $\omega_{14}$  и  $\vartheta_i$  ( $i = 1 \div 4$ ).

Для оценки и анализа природы корней уравнения используем подход, развитый в [52], из которого следует, что все четыре корня  $\Delta_i$  ( $i = 1 \div 4$ ) уравнения (16) являются действительными и определяются выражениями [53, 55]

$$\begin{aligned}\Delta_{1,2} &= \frac{-b}{4a} - S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}, \\ \Delta_{3,4} &= \frac{-b}{4a} + S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}},\end{aligned}\quad (23)$$

где

$$\begin{aligned}p &= \frac{8ac - 3b^2}{8a^2}, \\ q &= \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^3}, \\ S &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-2}{3}p + \frac{1}{3a} \left( Q + \frac{D_0}{Q} \right)}, \\ Q &= \sqrt[3]{\frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 - 4D_0^3}}{2}}, \\ D_0 &= c^2 - 3bd + 12ae, \\ D_1 &= 2c^3 - 9bcd + 27b^2e + 27ad^2 - 72ace,\end{aligned}$$

а  $a, b, c, d$  — коэффициенты из уравнения (16). Результаты анализа дискриминанта уравнения (16) (см. Приложение) позволяют объяснить особенности поведения ветвей закона дисперсии. Например, равенство дискриминанта нулю соответствует вырождению корней уравнения, а это, в условиях нашей задачи, выражается в пересечении ветвей закона дисперсии.

Исследуя (16), изучим поведение кривых закона дисперсии экситон-поляритонов. На рис. 7 видно, что закон дисперсии  $\Delta(\delta_1)$  при  $\delta_2 = 0$ ,  $\delta_3 = 0$  и без учета многофотонных переходов  $\omega_{14} = \omega_{24} = \omega_{13} = 0$  представляет собой структуру, состоящую из четырех восходящих с ростом  $\delta_1$  ветвей, положение и форма которых определяются параметрами системы.

Изучим поведение кривых закона дисперсии  $\Delta(\delta_2, \delta_3)$  экситон-поляритонов при  $\delta_1 \neq 0$ , когда учтен только один двухфотонный переход  $\omega_{13} \neq 0$ ,  $\omega_{14} = \omega_{24} = 0$ , и значения разности фаз

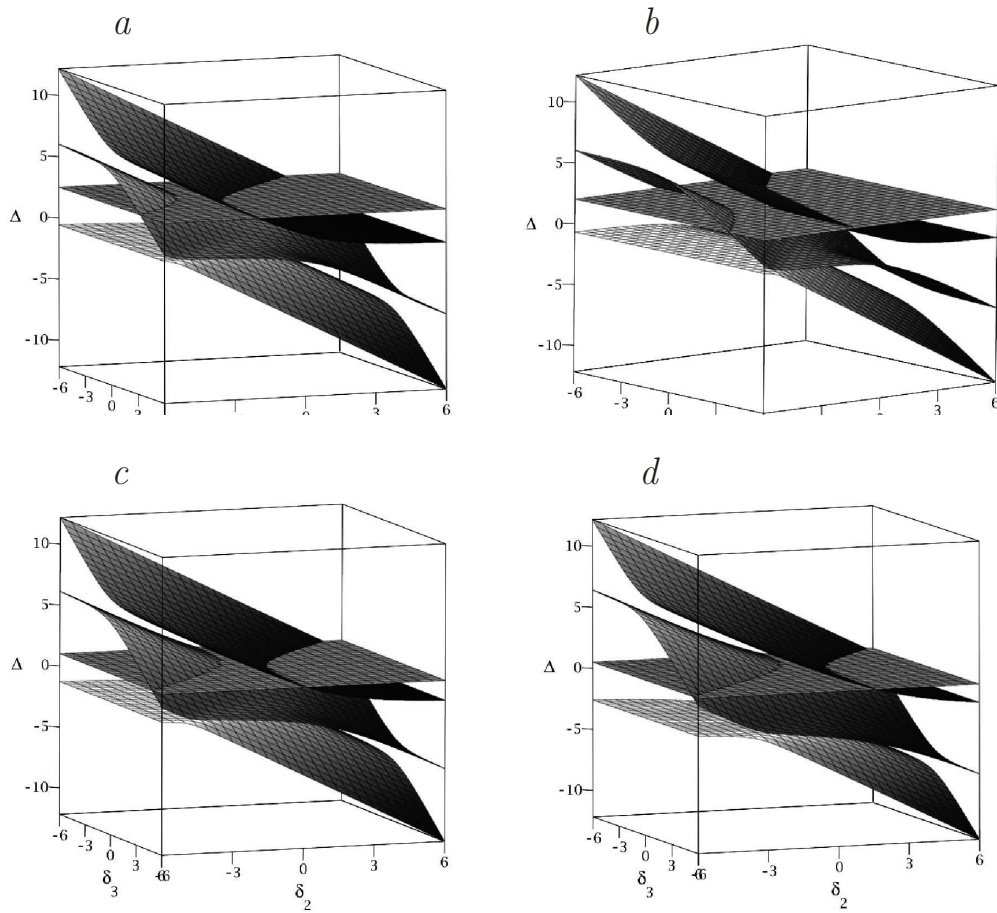


Рис. 8. Законы дисперсии  $\Delta(\delta_2, \delta_3)$  при разности фаз  $\vartheta_i = 0$  ( $i = 1 \div 4$ ) и значениях нормированных частот Раби однофотонных переходов  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$ , многофотонных переходов  $\omega_{14} = \omega_{24} = 0$ :  $\omega_{13} = 0.4$ ,  $\delta_1 = 2.1$  (а);  $\omega_{13} = 0.5$ ,  $\delta_1 = 1.5$  (b);  $\omega_{13} = 1$ ,  $\delta_1 = 0$  (c);  $\omega_{13} = 2$ ,  $\delta_1 = -1.5$  (d)

$\vartheta_i = 0$  ( $i = 1 \div 4$ ). Дисперсионное уравнение (16) примет вид

$$\begin{aligned} & \Delta(\Delta - \delta_1)(\Delta + \delta_2)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \\ & - (\Delta + \delta_2)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \\ & - \omega_{23}^2(\Delta - \delta_1)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \\ & - \omega_{34}^2\Delta(\Delta - \delta_1) - \omega_{13}^2\Delta(\Delta + \delta_2 + \delta_3) + \\ & + \omega_{34}^2 + 2\omega_{23}\omega_{13}(\Delta + \delta_2 + \delta_3)\cos\vartheta_1 - \\ & - 2\omega_{13}\omega_{23}\omega_{34}\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0. \quad (24) \end{aligned}$$

В этом случае вычисление и анализ значений дискриминанта уравнения (16) (см. Приложение) при изменяющихся расстройках резонансов позволяют получить значения, при которых дискриминант уравнения равен нулю. При этом наблюдается вырождение корней уравнения, что в нашем случае выражается в пересечении ветвей закона дис-

персии, а это, в свою очередь, означает перестройку энергетического спектра. Анализ полученных значений позволяет сделать вывод, что при некоторых значениях частоты Раби  $\omega_{13}$  и изменяющихся расстройках резонансов второго и третьего импульсов отсутствуют изменения расстройки резонанса первого импульса, действующего на основной частоте. При этом наблюдаются пересечения верхней и средней поляритонных ветвей  $\Delta(\delta_2, \delta_3)$  и средних ветвей закона дисперсии в различных областях отрицательных значений расстроек резонансов второго  $\delta_2$  и третьего  $\delta_3$  импульсов соответственно при фиксированном значении  $\delta_1$  (рис. 8 а). При увеличении значения частоты Раби  $\omega_{13}$  области пересечения верхней и средней поляритонных ветвей и обеих средних ветвей увеличиваются и смещаются в сторону положительных значений расстроек резонансов второго  $\delta_2$  и третьего  $\delta_3$  импульсов (рис. 8 б, в). Нужно от-



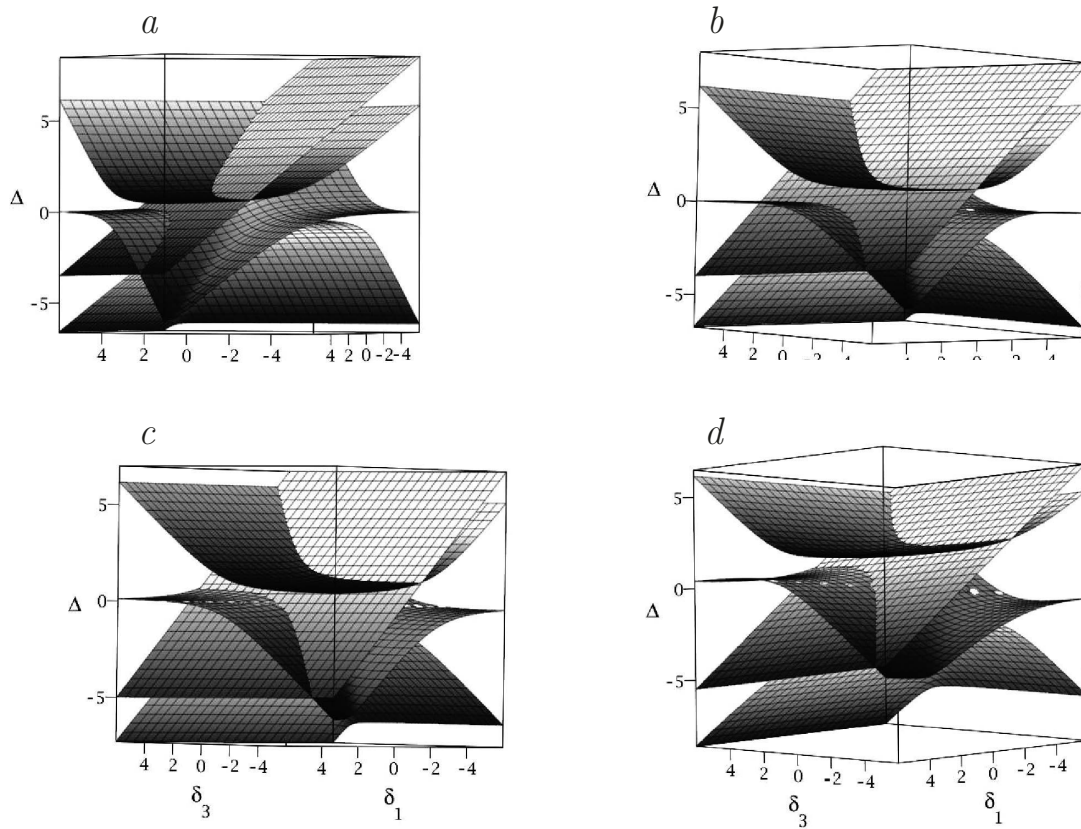


Рис. 9. Законы дисперсии  $\Delta(\delta_1, \delta_3)$  при разности фаз  $\vartheta_i = 0$  ( $i = 1 \div 4$ ) и значениях нормированных частот Раби однофотонных переходов  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$ , многофотонных переходов  $\omega_{13} = \omega_{14} = 0$ :  $\omega_{24} = 0.4$ ,  $\delta_2 = -2.1$  (a);  $\omega_{24} = 0.5$ ,  $\delta_2 = 1.5$  (b);  $\omega_{24} = 1$ ,  $\delta_2 = 0$  (c);  $\omega_{24} = 2$ ,  $\delta_2 = 1.5$  (d)

метить, что в этом случае средняя ветвь представляет собой плоскость, не зависящую от  $\delta_2$  и  $\delta_3$ . Что касается формы остальных ветвей закона дисперсии, то на рис. 8 d видно, что при изменении расстроек резонансов средняя ветвь, представляющая собой плоскость, значительно смещается в область  $\Delta < 0$ , тогда как остальные три ветви незначительно сближаются и расталкиваются друг относительно друга, изменяя свою форму, что свидетельствует о смещении квазиуровней друг относительно друга при изменении расстройки резонанса первого импульса, действующего в области экситонного перехода. Наличие пересечений ветвей закона дисперсии экситон-поляритонов обусловлено наличием в уравнении (24) интерференционного слагаемого  $\omega_{13}\omega_{23}\omega_{34}$ .

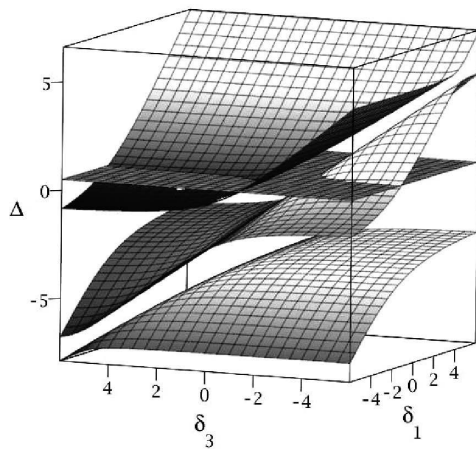
Изучим поведение кривых закона дисперсии  $\Delta(\delta_1, \delta_2)$  экситон-поляритонов при  $\delta_3 \neq 0$ , когда учтен только один двухфотонный переход  $\omega_{24} \neq 0$ ,  $\omega_{14} = \omega_{13} = 0$ , и значения разности фаз

$\vartheta_i = 0$  ( $i = 1 \div 4$ ). Дисперсионное уравнение (13) примет вид

$$\begin{aligned} &\Delta(\Delta - \delta_1)(\Delta + \delta_2)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \\ &\quad - (\Delta + \delta_2)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \\ &\quad - \omega_{23}^2(\Delta - \delta_1)(\Delta + \delta_2 + \delta_3) - \\ &\quad - \omega_{34}^2\Delta(\Delta - \delta_1) - \omega_{24}^2(\Delta - \delta_1)(\Delta + \delta_2) + \\ &\quad + \omega_{34}^2 + 2\omega_{23}\omega_{34}\omega_{24}(\Delta - \delta_1)\cos\vartheta_4 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

В этом случае при некоторых отрицательных значениях расстройки резонанса третьего импульса  $\delta_3$ , действующего в области биэкситон-триэкситонной конверсии, наблюдается пересечение верхней и средней поляритонных ветвей закона дисперсии в области положительных значений расстроек резонансов первого и второго импульсов (рис. 9 a). При увеличении значения расстройки резонанса  $\delta_3$  область пересечения увеличивается (рис. 9 b). При положительных значениях расстройки резонанса  $\delta_3$  возникает пересечение средних ветвей в положительной

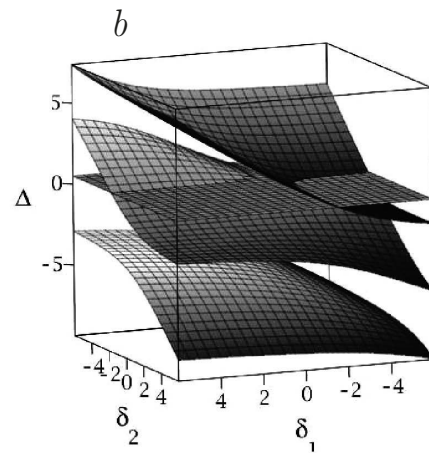
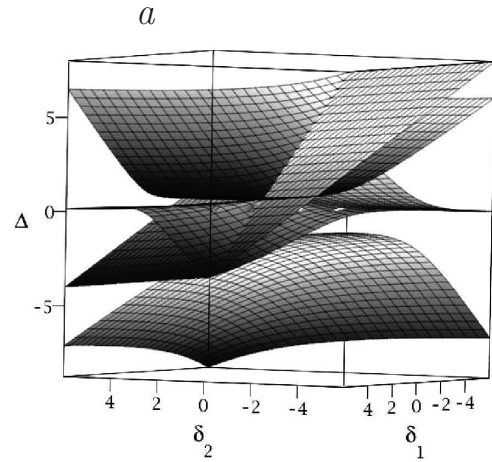




**Рис. 10.** Законы дисперсии  $\Delta(\delta_1, \delta_3)$  при разности фаз  $\vartheta_i = 0$  ( $i = 1 \div 4$ ) и значениях нормированных частот Раби однофотонных переходов  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$ , многофотонных переходов  $\omega_{13} = 2$ ,  $\omega_{24} = 0.5$ ,  $\omega_{14} = 0$ ,  $\delta_2 = 1.5$

области значений расстройек резонанса  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , при этом область пересечения верхней и средней ветвей смещается в область отрицательных значений расстройек резонанса  $\delta_1$  и  $\delta_2$  (рис. 9 c). Верхняя поляритонная ветвь представляет собой плоскость, а три остальные ветви закона дисперсии при изменении значений расстройек резонанса  $\delta_3$  незначительно смещаются в длинноволновую и коротковолновую области  $\Delta$ , изменяя свою форму. При этом можно наблюдать при различных значениях  $\delta_1$  и  $\delta_2$  сближение и расталкивание ветвей закона дисперсии (рис. 9 d). Наличие пересечений ветвей закона дисперсии экситон-поляритонов обусловлено наличием в уравнении (19) интерференционного слагаемого  $\omega_{23}\omega_{34}\omega_{24}$ .

Изучим поведение кривых закона дисперсии  $\Delta(\delta_1, \delta_3)$  экситон-поляритонов при  $\delta_2 \neq 0$ , когда учтены одновременно два двухфотонных перехода  $\omega_{13} \neq 0$ ,  $\omega_{24} \neq 0$ , а  $\omega_{14} = 0$ , и значения разности фаз  $\vartheta_i = 0$  ( $i = 1 \div 4$ ). В таком случае можно наблюдать пересечения верхней и средней и средних ветвей закона дисперсии  $\Delta(\delta_1, \delta_2)$ , расположенных в различных областях значений  $\delta_1$  и  $\delta_3$  (рис. 10), при этом средняя ветвь представляет собой плоскость, не зависящую от значения  $\delta_2$ . При условии  $\omega_{13} < \omega_{24} \neq 0$  и одинаковых значениях расстройки резонанса второго импульса  $\delta_2 = 1.5$  наблюдается смещение верхней и обеих средних ветвей в корот-



**Рис. 11.** Законы дисперсии  $\Delta(\delta_1, \delta_2)$  при разности фаз  $\vartheta_i = 0$  ( $i = 1 \div 4$ ) и значениях нормированных частот Раби однофотонных переходов  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$ , многофотонных переходов:  $\omega_{13} = 1$ ,  $\omega_{24} = 0.5$ ,  $\omega_{14} = 1$ ,  $\delta_3 = 1.5$  (a);  $\omega_{13} = 2$ ,  $\omega_{24} = 0.5$ ,  $\omega_{14} = 1.8$ ,  $\delta_3 = 1.5$  (b)

коволновую область  $\Delta > 0$ , при этом области пересечения значительно увеличиваются и наблюдается сильное сближение верхней и средней ветвей в области положительных расстройек  $\delta_3$  и отрицательных значений  $\delta_1$ . Также наблюдается сильное смещение нижних ветвей закона дисперсии  $\Delta(\delta_1, \delta_3)$  в длинноволновую область  $\Delta < 0$  (рис. 10).

Изучим поведение кривых закона дисперсии  $\Delta(\delta_2, \delta_3)$  экситон-поляритонов при  $\delta_1 \neq 0$ , когда учтены одновременно два двухфотонных перехода  $\omega_{13} \neq 0$ ,  $\omega_{24} \neq 0$  и трехфотонный переход  $\omega_{14} \neq 0$  при значении разности фаз  $\vartheta_i = 0$  ( $i = 1 \div 4$ ). В этом случае наблюдается пересечение верхней и средней поляритонных ветвей по прямой  $\delta_2 = -\delta_3$ . При этом

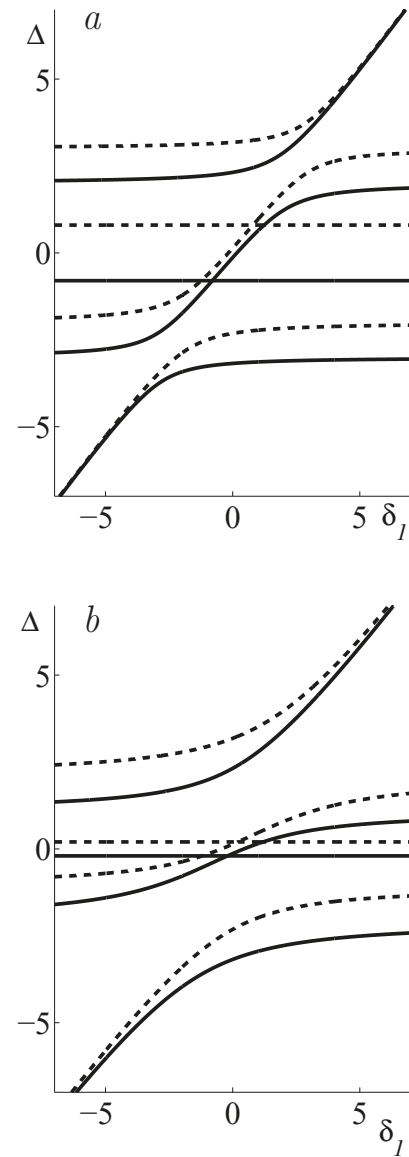
средняя ветвь представляет собой плоскость. Также существует пересечение обеих средних ветвей по прямой  $\delta_2 = 1.5$ , при значениях расстройек резонансов  $\delta_1 = -1.5$ ,  $\delta_2 = 1.5$  и  $\delta_3 = -1.5$  наблюдается точка пересечения верхней и обеих средних ветвей закона дисперсии  $\Delta(\delta_2, \delta_3)$  (рис. 11 а), что свидетельствует о наличии трехкратно вырожденного корня дисперсионного уравнения (13). При изменении значений частот Раби  $\omega_{14}$  наблюдаются пересечения обеих средних и средней и верхней ветвей, при этом области пересечений наблюдаются при различных значениях расстройек резонансов рис. 11 б.

Что касается поведения законов дисперсии экситон-поляритонов при разности фаз  $\vartheta_i = \pi$  ( $i = 1 \div 4$ ), то нужно отметить, что все указанные особенности поведения, описанные для случая  $\vartheta_i = 0$  ( $i = 1 \div 4$ ), сохраняются, и будут наблюдаться пересечения ветвей законов дисперсии между средней и нижней поляритонными ветвями.

Изучим поведение кривых закона дисперсии  $\Delta(\delta_2, \delta_3)$  экситон-поляритонов при  $\delta_1 \neq 0$ , когда учтены два двухфотонных перехода  $\omega_{13} \neq 0$ ,  $\omega_{24} \neq 0$ ,  $\omega_{14} = 0$ , и значения разности фаз  $\vartheta_i = \frac{\pi}{2}$  ( $i = 1 \div 4$ ). В этом случае пересечение ветвей закона дисперсии  $\Delta(\delta_2, \delta_3)$  наблюдается при определенных наборах значений частот Раби двухфотонных переходов  $\omega_{13} = 0.5$  и  $\omega_{24} = 2$ , либо  $\omega_{13} = 2$  и  $\omega_{24} = 0.5$ , либо  $\omega_{13} = \omega_{24} = 1$  при условии  $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$  (рис. 12).

Изучим поведение кривых закона дисперсии  $\Delta(\delta_1)$  экситон-поляритонов при  $\delta_1 \neq 0$ , когда учтен трехфотонный переход  $\omega_{14} \neq 0$ ,  $\omega_{13} = \omega_{24} = 0$ , и значения разности фаз  $\vartheta_i = \frac{\pi}{2}$  ( $i = 1 \div 4$ ). В этом случае пересечение ветвей закона дисперсии  $\Delta(\delta_1)$  наблюдается при определенных значениях частот Раби трехфотонного перехода  $\omega_{14} = 1$  при условии  $|\delta_1| = |\delta_2| = |\delta_3|$  — пересечение верхней и средней поляритонных ветвей в области  $\Delta > 0$  и средней и нижней поляритонных ветвей в области  $\Delta < 0$ , либо перехода  $\omega_{14} = 2$  при условии  $\delta_1 = \delta_2 \neq \delta_3$  ( $-0.5, -0.5, 2$ ) или  $\delta_1 \neq \delta_2 = \delta_3$  ( $-2, 0.5, 0.5$ ). В случае, если  $\omega_{14} < 1$ , найден набор параметров, при которых возможно пересечение ветвей закона дисперсии при  $\omega_{14} = 0.2$  (рис. 13 а) и  $\omega_{14} = 0.5$  (рис. 13 б).

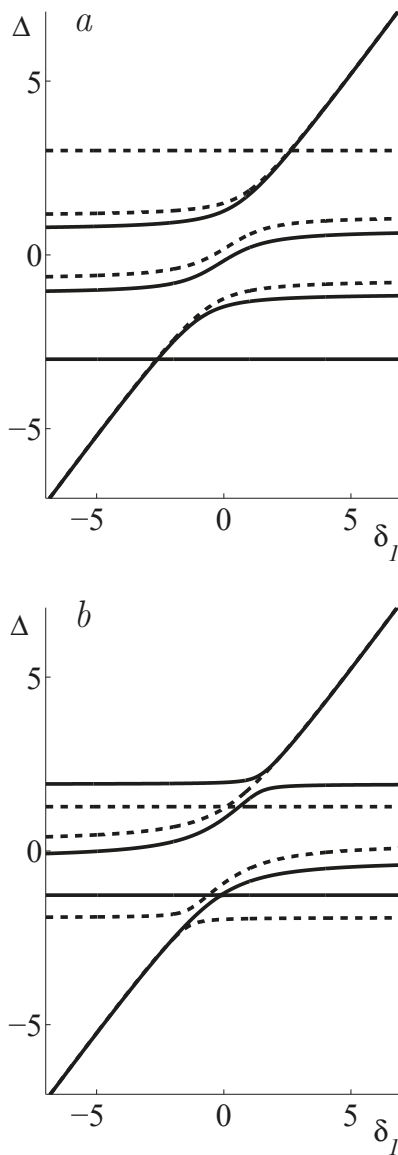
Изучим поведение кривых закона дисперсии  $\Delta(\delta_1)$  экситон-поляритонов при  $\delta_1 \neq 0$ , когда учтены все многофотонные переходы  $\omega_{14} \neq 0$ ,  $\omega_{13} \neq 0$ ,  $\omega_{24} \neq 0$ , и значения разности фаз  $\vartheta_i = \frac{\pi}{2}$  ( $i = 1 \div 4$ ). В этом случае пересечение ветвей закона дисперсии  $\Delta(\delta_1)$  наблюдается при определенных значениях частот Раби многофотонных переходов  $\omega_{14} = 0.2$ ,  $\omega_{24} = 1.5$ ,  $\omega_{13} = 1$  в длинноволновой области  $\Delta$



**Рис. 12.** Законы дисперсии  $\Delta(\delta_1)$  при разности фаз  $\vartheta_i = \pi/2$  ( $i = 1 \div 4$ ) и значениях нормированных частот Раби однофотонных переходов  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$ , многофотонных переходов  $\omega_{14} = 0$ . а —  $\omega_{24} = 2$ ,  $\omega_{13} = 0.5$ ,  $\delta_2 = 1$ ,  $\delta_3 = -0.2$  — сплошные линии,  $\delta_2 = -1$ ,  $\delta_3 = 0.2$  — штриховые; б —  $\omega_{24} = 0.5$ ,  $\omega_{13} = 2$ ,  $\delta_2 = 1$ ,  $\delta_3 = -0.8$  — сплошные линии,  $\delta_2 = -1$ ,  $\delta_3 = 0.8$  — штриховые

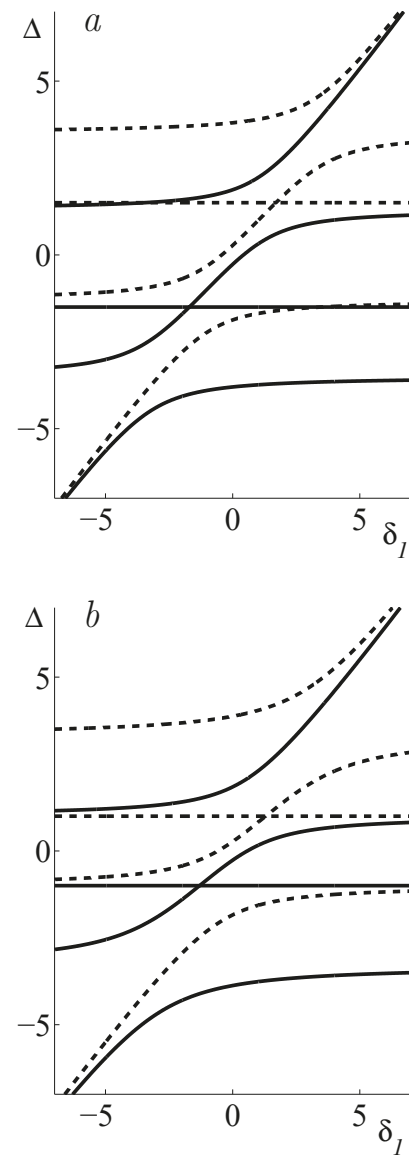
(рис. 14 а) и при  $\omega_{24} = 1$ ,  $\omega_{13} = 1.5$  в коротковолновой области  $\Delta$  (рис. 14 б). Также отметим, что пересечения зеркально симметричны относительно  $\Delta = 0$ .

Анализ поведения закона дисперсии экситон-поляритонов позволяет сделать вывод, что при учете процессов двухфотонного и трехфотонного воз-



**Рис. 13.** Законы дисперсии  $\Delta(\delta_1)$  при разности фаз  $\vartheta_i = \pi/2$  ( $i = 1 \div 4$ ) и значениях нормированных частот Раби однофотонных переходов  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$ , многофотонных переходов  $\omega_{24} = \omega_{13} = 0$ . *a* —  $\omega_{14} = 0.2$ ,  $\delta_2 = 1$ ,  $\delta_3 = 1.4$  — сплошные линии,  $\delta_2 = -1$ ,  $\delta_3 = 1.4$  — штриховые; *b* —  $\omega_{14} = 0.5$ ,  $\delta_2 = -1$ ,  $\delta_3 = 1.6$  — сплошные линии,  $\delta_2 = 1$ ,  $\delta_3 = 1.6$  — штриховые

буждения биэкситонов и триэкситонов в полупроводнике в отсутствие условий точного резонанса второго и третьего импульсов  $\delta_2 \neq 0$ ,  $\delta_3 \neq 0$  возникают эффекты пересечения верхней и средней ветвей в коротковолновой области спектра при  $\vartheta_i = 0$  и эффекты пересечения нижней и средней ветвей в длинноволновой области спектра при  $\vartheta_i = \pi$ . При этом области пересечения ветвей законов диспер-



**Рис. 14.** Законы дисперсии  $\Delta(\delta_1)$  при разности фаз  $\vartheta_i = \pi/2$  ( $i = 1 \div 4$ ) и значениях нормированных частот Раби однофотонных переходов  $\omega_{23} = \omega_{34} = \omega_{24} = 1$ , многофотонных переходов  $\omega_{24} = \omega_{13} = 0$ . *a* —  $\omega_{14} = 0.2$ ,  $\delta_2 = 1$ ,  $\delta_3 = 1.4$  — сплошные линии,  $\delta_2 = -1$ ,  $\delta_3 = -1.4$  — штриховые; *b* —  $\omega_{24} = 0.5$ ,  $\delta_2 = -1$ ,  $\delta_3 = 2.6$  — сплошные линии,  $\delta_2 = 1$ ,  $\delta_3 = -2.6$  — штриховые

сии наблюдаются при ограниченных наборах значений расстроек резонансов падающих импульсов и различных значениях частот Раби многофотонных переходов. Кроме того, наблюдается существенное изменение формы ветвей законов дисперсии, а также смещение ветвей законов дисперсии экситон-поляритонов. Наличие областей сближения и удаления ветвей законов дисперсии экситон-поляритонов

при различных значениях частот Раби, т. е. при изменении плотностей фотонов падающих импульсов  $f_{20}$  и  $f_{30}$ , свидетельствует о возникновении эффекта индуцированной мощным полем второго и третьего импульсов оптической связи экситона с излучением, а наличие областей и точек пересечений в законе дисперсии экситон-поляритонов свидетельствует о наличии частот нутации в системе экситон-поляритонов. При  $\omega_{24} = 0.5$ ,  $\omega_{13} = 2$ ,  $\omega_{14} = 1$ ,  $\delta_3 = 1.5$  наблюдается пересечение трех ветвей закона дисперсии в одной точке, и это означает, что существует только одна частота нутации экситон-поляритонов. Эффекты сближения и расталкивания ветвей, пересечения ветвей закона дисперсии при изменении значений частот Раби многофотонных переходов  $\Omega_{13}, \Omega_{24}, \Omega_{14}$  можно интерпретировать как изменение силы связи фотонов первого импульса с экситоном. Как было показано в [50], сближение и пересечение ветвей закона дисперсии экситон-поляритонов приводит к ослаблению поглощения на частотах, где наблюдается пересечение. Фактически экспериментатор, постепенно изменяя частоты Раби, зависящие от интенсивностей полей падающих импульсов, будет наблюдать уменьшение и последующее исчезновение линии или линий поглощения и их повторное возникновение при расталкивании ветвей закона дисперсии. Учет многофотонных процессов приведет к возникновению в реальных условиях несимметричного эффекта Аутлера – Таунса в экситонной области спектра, теоретически изученного в [50]. Экспериментальное определение частот, при которых будет наблюдаться пересечение ветвей закона дисперсии (уменьшение поглощения), позволит найти реальные значения разностей фаз для различных полупроводников. Таким образом, перенормировка энергетического спектра экситон-поляритонов ярко проявляется в эффекте возникновения сильной связи в длинноволновой (коротковолновой) области и ослаблении в коротковолновой (длинноволновой) области в зависимости от частоты  $\omega_0$ . Это указывает также на смещение актуальных точек  $k$ -пространства. Эффекты пересечения ветвей закона дисперсии можно, по-видимому, наблюдать экспериментально — если изменять интенсивность излучения, это приведет к изменению силы связи фотонов первого импульса с экситоном и к спектральному смещению уровней.

В работе [50] также был представлен расчет мощности падающего импульса и константы двухфотонного взаимодействия с биэкситонами для кристаллов типа CuCl для наблюдения описанных выше эффектов в объемных средах. Расчеты пока-

зали, что эффекты можно наблюдать при плотности фотонов  $N_c \approx 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Именно при таких параметрах, по нашему мнению, можно наблюдать пересечение ветвей закона дисперсии. Учитывая, что нам неизвестны константы биэкситон-триэкситонной конверсии и экситон-фотонного взаимодействия для объемных сред, так как энергия связи триэкситона, по всей видимости, существенно меньше энергии связи биэкситонов, можно сказать, что наблюдение описанных выше эффектов потребует большей плотности фотонов падающего излучения. Отсюда можно сделать вывод, что при одновременном учете однофотонных, двухфотонных и трехфотонных оптических переходов возникает существенная перестройка энергетического спектра полупроводника в окрестности экситонного состояния — наблюдается расщепление экситонного уровня с образованием экситон-поляритонов, возникают квазиуровни, положение которых может существенно изменяться при изменении интенсивности полей падающих импульсов и значений расстроек резонансов. Кроме того, разности фаз между константами взаимодействия также являются управляющим параметром, определяющим спектральное смещение расщепленных квазиуровней экситонного состояния. Представляет интерес то обстоятельство, что если пренебречь процессами двухфотонного возбуждения биэкситонов и триэкситонов, а также процессом трехфотонного возбуждения триэкситонов, то симметричные смещения частот экситонного перехода в красную и голубую сторону по-прежнему будут иметь место, а изменения константы экситон-фотонного перехода (т. е. изменения силы связи фотонов первого импульса с экситоном) не происходит. Поэтому более детальное исследование величин константы связи позволит получить ответ об актуальности учета двухфотонного возбуждения биэкситонов и триэкситонов и трехфотонного возбуждения триэкситонов наряду и одновременно с учетом экситон-фотонного взаимодействия и экситон-биэкситонной и биэкситон-триэкситонной конверсий.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что в статье представлены результаты исследования особенностей поведения закона дисперсии экситон-поляритонов в полупроводнике, взаимодействующих с тремя импульсами когерентного лазерного излучения с частотами фотонов, находящимися в резонансе с

оптически разрешенными однофотонными переходами между соседними уровнями, а также с учетом прямых двухфотонных переходов и прямого трехфотонного перехода в приближении заданных плотностей фотонов второго и третьего импульсов. Показано, что в такой системе закон дисперсии экситон-поляритонов представляет собой структуру из четырех ветвей, положение и форма которых определяется частотами Раби указанных шести оптических переходов, расстройками резонанса и плотностями фотонов трех импульсов. Непосредственный учет многофотонных переходов, двухфотонных и трехфотонного, приводят к зависимости закона дисперсии экситон-поляритонов от квантовых параметров — разностей фаз между константами взаимодействия, определяющими частоты Раби соответствующих переходов. Найдены значения параметров системы — расстройек резонансов и частот Раби, при которых наблюдается пересечение ветвей закона дисперсии экситон-поляритонов, что свидетельствует о возможности влияния учета однофотонных, двухфотонных и трехфотонных переходов на перестройку энергетического спектра в окрестности экситонного уровня в полупроводнике. Кроме того, показано, что расстройки резонансов являются управляющим параметром перестройки энергетического спектра экситонного состояния и позволяют осуществлять контроль за положением квазиуровней в системе.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражение (22) представляет собой кваттику вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

с действительными коэффициентами и  $a \neq 0$ . Характер корней выражения (22) определяется знаком его дискриминанта

$$\begin{aligned} \text{Discr} = & 256a^3e^3 - 192a^2bde^2 - 128a^2c^2e^2 + \\ & + 144a^2cd^2e - 27a^2d^4 + 144ab^2ce^2 - 6ab^2d^2e - \\ & - 80abc^2de + 18abcd^2 + 16ac^4e - 4ac^3d^2 - 27b^4e^2 + \\ & + 18b^3cde - 4b^3d^3 - 4b^2c^3e + b^2c^2d^2. \end{aligned}$$

Введем вспомогательные многочлены:

$$\begin{aligned} P &= 8ac - 3b^2, \quad R = b^3 + 8da^2 - 4abc, \\ D_0 &= c^2 - 3bd + 12ae, \\ D &= 64a^3e - 16a^2c^2 + 16ab^2c - 16a^2bd - 3b^4. \end{aligned}$$

Возможные случаи для природы корней следующие:

1.  $\text{Discr} > 0$ , тогда все четыре корня уравнения действительны, если  $P < 0$  и  $D < 0$ , то все четыре корня действительны и различны;
2.  $\text{Discr} = 0$ , тогда (и только тогда) многочлен имеет кратный корень,
  - (а) если  $P < 0$  и  $D < 0$  и  $D_0 \neq 0$ , то существуют действительный двойной корень и два вещественных простых корня,
  - (б) если  $D_0 = 0$  и  $D \neq 0$ , то существуют тройной корень и простой корень, все действительные,
  - (с) если  $P < 0$ , есть два действительных двойных корня,
  - (д) если  $D_0 = 0$ , все четыре корня равны  $-\frac{b}{4a}$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. H. J. Kimble, *Nature* **453**, 1023 (2008).
2. J. Simon, H. Tanji, S. Ghosh et al., *Nature Phys.* **3**, 765 (2007).
3. H. Tanji, S. Ghosh, J. Simon et al., *Phys. Rev. Lett.* **103**, 043601 (2009).
4. A. G. Steele, W. G. McMullan, and M. L. W. Thewalt, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2899 (1987).
5. H. Katow, J. Usukura, R. Akashi et al., *Phys. Rev. B* **95**, 125205 (2017).
6. A. C. Cancio and Yia-Chung Chang, *Phys. Rev. B* **42**, 11317 (1990).
7. T. Matsuo, Y. Ueda, H. Mizuno et al., *ACS Photonics* **9**, 2015 (2022).
8. X. Shang, B. Ma, H. Ni et al., *AIP Advances* **10**, 085126 (2020).
9. E. Poem, Y. Kodriano, C. Tradonsky et al., *Nature Phys.* **6**, 993 (2010).
10. M. Ediger, G. Bester, B. D. Gerardot et al., *Phys. Rev. Lett.* **98**, 036808 (2007).
11. Y. Arashida, Y. Ogawa, and F. Minami, *Phys. Rev. B* **84**, 125309 (2011).
12. Y. Igarashi, M. Shirane, Y. Ota et al., *Phys. Rev. B* **81**, 245304 (2010).
13. J. Kettler, M. Paul, F. Olbrich et al., *Phys. Rev. B* **94**, 045303 (2016).
14. M. R. Molas et al., *Europhys. Lett.* **113**, 17004 (2016).



15. T. Kazimierczuk, D. Frohlich, S. Scheel et al., *Nature* **514**, 343 (2014).
16. E. R. Schmidgall, I. Schwartz, L. Gantz et al., *Phys. Rev. B* **90**, 241411(R) (2014).
17. V. Mlinar and A. Zunger, *Phys. Rev. B* **80**, 205311 (2009).
18. Y. Arashida, Y. Ogawa, and F. Minami, *AIP Conf. Proc.* **1566**, 490 (2013).
19. M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali et al., *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996).
20. J. M. Fink, M. Göppl, M. Baur et al., *Nature* **454**, 315 (2008).
21. L. S. Bishop, J. M. Chow, J. Koch et al., *Nature Phys.* **5**, 105 (2009).
22. J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann et al., *Nature* **443**, 409 (2006).
23. D. Lidzey, D. Bradley, M. Skolnick et al., *Nature* **395**, 53 (1998).
24. C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, and Y. Arakawa, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3314 (1992).
25. A. Amo, J. Lefrère, S. Pigeon et al., *Nature Phys.* **5**, 805 (2009).
26. A. Baas, J. P. Karr, H. Eleuch, and E. Giacobino, *Phys. Rev. A* **69**, 023809 (2004).
27. A. Delteil, T. Fink, A. Schade et al., *Nature Mater.* **18**, 219 (2019).
28. G. Muñoz-Matutano, A. Wood, M. Johnsson et al., *Nature Mater.* **18**, 213 (2019).
29. E. O. Nyakang'o, D. Shylla, K. Indumathi et al., *Eur. Phys. J. D* **74**, 187 (2020).
30. E. D. Valle, S. Zippilli, F. P. Laussy et al., *Phys. Rev. B* **81**, 035302 (2010).
31. S. M. Yoshida, S. Endo, J. Levinsen, and M. M. Parish, *Phys. Rev. X* **8**, 011024 (2018).
32. Z. Tan, L. Wang, M. Liu, Y. Zhu, J. Wang, and M. Zhan, *arXiv:1901.00127v1*.
33. F. E. Zimmer, J. Otterbach, R. G. Unanyan et al., *Phys. Rev. A* **77**, 063823 (2008).
34. B. K. Dutta and P. Panchadhyayee, *Laser Phys.* **28**, 045201 (2018).
35. K. Sawicki, T. J. Sturges, M. Ściesiek et al., *Nanophotonics* **10**, 2421 (2021).
36. T. M. Autry, G. Nardin, Ch. L. Smallwood et al., *Phys. Rev. Lett.* **125**, 067403 (2020).
37. H. M. Kwak, T. Jeong, Y.-S. Lee, and H. S. Moon, *Opt. Commun.* **380**, 168 (2016).
38. S. K. Nath, V. Naik, A. Chakrabarti, and A. Ray, *J. Opt. Soc. Amer. B* **36**, 2610 (2019).
39. J. Tang, Yu. Deng, and C. Lee, *Phys. Rev. Appl.* **12**, 044065 (2019).
40. S. Gasparinetti, J.-C. Besse, M. Pechal, R. D. Buijs, C. Eichler, H. J. Carmichael, and A. Wallraff, *Phys. Rev. A* **100**, 033802 (2019).
41. Е. А. Якшина, Д. Б. Третьяков, В. М. Энтин, И. И. Бегеров, И. И. Рябцев, *КЭ* **48**, 886 (2018).
42. П. И. Хаджи, Л. Ю. Надькин, Д. А. Марков, *ФТТ* **60**, 660 (2018).
43. П. И. Хаджи, Л. Ю. Надькин, Д. А. Марков, *ФТТ* **64**, 1673 (2022).
44. П. И. Хаджи, О. В. Коровай, Л. Ю. Надькин, *ЖЭТФ* **155**, 620 (2019).
45. П. И. Хаджи, О. В. Коровай, Л. Ю. Надькин, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 623 (2018).
46. О. В. Коровай, *ЖЭТФ* **160**, 307 (2021).
47. О. В. Коровай, *ЖЭТФ* **161**, 631 (2022).
48. П. И. Хаджи, *Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках*, Штиинца, Кишинев (1985), с. 209.
49. П. И. Хаджи, Л. Ю. Надькин, *КЭ* **36**, 415 (2018).
50. Л. Ю. Надькин, О. В. Коровай, Д. А. Марков, *Опт. и спектр.* **3**, 272 (2021).
51. L. Yang, I. V. Schweigert, S. T. Cundiff, and S. Mukamel, *Phys. Rev. B* **75**, 125302 (2007).
52. L. Yang and S. Mukamel, *Phys. Rev. B* **77**, 075335 (2008).
53. W. F. Carpenter, *Math. Magazine* **39** (1), 28 (1966).
54. П. И. Хаджи, *Кинетика рекомбинационного излучения экситонов и биэкситонов в полупроводниках*, Штиинца, Кишинев (1979).
55. M. D. Yacoub and G. Fraidenraich, *Math. Gazette* **96** (536), 271 (2012).