ЖЭТФ, 2024, том 166, вып. 5 (11), стр. 588–602 © 2024

О ВЛИЯНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА НА ИЗЛУЧЕНИЕ ГАРМОНИК ОДНОПРОХОДНЫХ ЛАЗЕРОВ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

К. В. Жуковский *

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 мая 2023 г.,
после переработки 14 апреля 2024 г.
Принята к публикации 14 апреля 2024 г.

В настоящее время во многих областях науки и техники все шире применяется когерентное излучение лазеров на свободных электронах (ЛСЭ). В прикладных и теоретических исследованиях важным эффектом является нелинейная генерация второй гармоники в материалах и на поверхностях как реакция на их облучение. В качестве источников света используют ЛСЭ, которые генерируют когерентное излучение в диапазоне от видимого до рентгеновского. При этом вторая гармоника собственно источника, ЛСЭ, является нежелательной, так как она маскирует исследуемый отклик на той же частоте. Нами аналитически исследуется влияние параметров электронного пучка на излучение ЛСЭ; проводится исследование генерации гармоник, в особенности второй; анализируются основные факторы, вызывающие появление второй гармоники в спектре ЛСЭ. Выясняется влияние параметров пучка: сечения, эмиттанса, параметров Твисса и разброса энергии, по отдельности и вместе на длину усиления и генерацию гармоник ЛСЭ на примере хорошо документированного ЛСЭ LEUTL. Анализируется влияние этих параметров на мощности излучения гармоник, в особенности второй. Исследуется также влияние гармоники поля ондулятора на излучение гармоник ЛСЭ. Предлагается повысить разброс энергий электронов в два раза до максимально возможного значения, обеспечивающего группировку электронов и одновременно уменьшение содержания второй гармоники в спектре ЛСЭ на один-два порядка. Также предлагается использовать слабую гармонику поля ондулятора с той же целью — подавить гармонику ЛСЭ.

DOI: 10.31857/S0044451024110026

1. ВВЕДЕНИЕ

Ондуляторное излучение (ОИ) представляет собой излучение релятивистских электронов в пространственно-периодическом магнитном поле. Оно было предсказано Гинзбургом [1] в середине XX века и вскоре после этого получено Мотцом [2]. ОИ от сгустков электронов некогерентное, когда длина сгустка значительно больше длины волны; это происходит в большинстве случаев, но не всегда. Когерентное ОИ от электронов в сгустках, длина которых сравнима или меньше длины волны, было также предсказано Гинзбургом и получено Мадэйем [3] в лазере на свободных электронах (ЛСЭ) в миллиметровом диапазоне. В XXI веке, с появлением новых технических возможностей и пучков высокого качества, ЛСЭ продвинулись в рентгеновский диапазон и активно используются в качестве источников излучения во многих областях. ЛСЭ представляют собой источники излучения четвертого поколения и являются логичным развитием источников синхротронного излучения (СИ) в XX веке [4–7]; теория ЛСЭ и практика их применения представлены в обширной литературе (см., например, [8–14]). Не останавливаясь на деталях, скажем, что когерентное излучение в ондуляторах ЛСЭ происходит от микробанчей электронов, отстоящих друг от друга на длину волны излучения, а сами микробанчи имеют размер менее длины волны излучения [1]. Основными приборами в современном ЛСЭ является ускоритель и ондулятор; первый ускоряет электроны до высокой энергии, сохраняя малый разброс энергии и эмиттанс, второй представляет систему генерации и излучения в ЛСЭ. Группировка электронов в микробанчи происходит под действием силы Лоренца волны электромагнитного излучения в ондуляторе; она ускоряет электроны, находящиеся позади узлов волны ОИ, и замедляет электроны, находящиеся впереди узлов волны ОИ. Электроны в

* E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

ондуляторе группируются не только на длине волны излучения; группировка идет также и на длинах волн гармоник, но слабее, чем на длине волны основного тона. Наиболее распространенный тип ондулятора — плоский. На оси плоского ондулятора излучение с соседних периодов приходит в фазе для нечетных гармоник и в противофазе для четных. Таким образом, в плоском ондуляторе на оси излучаются в идеале только нечетные гармоники, а четные подавлены. В реальности пучок электронов имеет конечное сечение и на оси излучаются как нечетные, так и четные гармоники. В ондуляторах с двоякопериодическим полем слабая гармоника основного поля ондулятора позволяет в определенных пределах регулировать излучение гармоник ОИ. Кроме того, в реальных ондуляторах всегда присутствует гармоника поля хотя бы потому, что идеальное моногармоническое поле во всем зазоре ондулятора не удовлетворяет уравнениям Максвелла.

Гармоники излучения ЛСЭ могут быть полезны, когда требуется более высокочастотное излучение от электронов данной энергии. Однако не всегда присутствие гармоник играет положительную роль. Например, вторая гармоника ЛСЭ маскирует и затрудняет исследование нелинейного отклика второй гармоники (SHG) [15] среды при исследовании свойств материалов [16–18], пленок и поверхностей [19] в физике [20] и химии [21], органических соединений [22, 23] и др. В XUV-диапазоне [24] генерация четных гармоник наблюдалась при облучении Ti $M_{2,3}$, в видимом диапазоне [25, 26] нелинейная генерация четных гармоник основного тона возникает при исследовании физико-химических свойств молекул, пленок и поверхностей и может указывать на нарушение внутренней симметрии исследуемых образцов [21, 23]; нелинейный отклик в рентгеновском диапазоне используется при исследованиях с помощью ядерного резонанса. Поскольку мощность отклика второй гармоники SHG естественно значительно меньше мощности источника, содержание второй гармоники ЛСЭ должно быть минимальным.

Мощности гармоник ЛСЭ могут быть рассчитаны аналитически с помощью формализма коэффициентов Бесселя с учетом всех основных факторов в обобщенных функциях Бесселя: параметров ондулятора, параметров пучка и его отклонения от оси, эмиттанса, фокусировки и т. д. Аналитические выражения для различных ондуляторов с учетом гармоник поля приведены во многих работах (см., например, [27–33]). С их использованием можно рассчитать мощность спонтанного излучения с учетом основных потерь, но в ЛСЭ рассчитать точно эволюцию мощности гармоник по длине ондуляторов невозможно из-за сложности комплекса уравнений для зарядов и полей и огромного числа электронов. Расчет в моделях ЛСЭ проводится численно с помощью специальных программ (см., например, [34–36] и др.). При этом результаты численного решения уравнений движения и излучения электронов в магнитном поле ондулятора с учетом гармоник поля и взаимодействия с полем волны ОИ согласуются с экспериментальными значениями мощности, измеренной по длине ондуляторов, с точностью до порядка величины для мощности основного тона; для гармоник разброс значений больше [37–41]. Недостатком численных моделей является то, что они не дают возможность выделить и проанализировать в отдельности влияние факторов на генерацию гармоник ЛСЭ.

Мы используем приближенное аналитическое описание экспоненциального роста мощности гармоник в ЛСЭ, которое включает точно рассчитанные коэффициенты Бесселя. Последние определяют параметры Пирса гармоник, их генерацию и дают возможность выявить роль различных факторов в излучении гармоник. Используя аналитические выражения, мы исследуем влияние параметров ондулятора и пучка на излучение ЛСЭ с целью по возможности уменьшить мощность излучения второй гармоники и сохранить при этом мощность основного тона. Ниже мы исследуем влияние сечения, эмиттанса и разброса энергий пучка на излучение ЛСЭ.

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МОЩНОСТИ ГАРМОНИК ЛСЭ

Основные формулы мощности для расчета излучения гармоник ЛСЭ неоднократно публиковались ранее, например, в [27–33]; результаты при этом согласуются с численными моделями [34, 35, 42–45] и данными всех основных ЛСЭ в мире в диапазоне от видимого до жесткого рентгеновского [37–41]. Ниже мы приведем только основные выражения для мощности гармоник ЛСЭ в насыщении. Гармоника n ОИ под эффективным углом Θ к оси ондулятора имеет следующую длину волны:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2}\left(1 + \frac{k^2}{2} + (\gamma\Theta)^2\right), \qquad (1)$$

где

$$k = H_0\lambda_u e/2\pi mc^2 \approx 0.9337 H_0[\text{Тл}]\,\lambda_u[\text{см}]$$

— ондуляторный параметр, e — заряд электрона, λ_u — период ондулятора, H_0 — амплитуда его по-

ля. Для плоского ондулятора коэффициенты Бесселя $f_{n;x,y}$ x- и y-поляризаций n-й гармоники с учетом ее бетатронного расщепления имеют вид [46]

$$f_{n;x} \approx \sum_p \tilde{J}_p \left| \left(J_{n+1}^n + J_{n-1}^n\right) + J_n^n \frac{2}{k}\gamma\theta\cos\varphi \right|,$$
$$f_{n;y} \approx \sum_p \left(\tilde{J}_p \left| J_n^n \frac{2}{k}\gamma\theta\sin\varphi \right| + \right. \tag{2}$$
$$\left. + J_n^n \frac{\sqrt{2}\pi y_0}{\lambda_u}\left(\tilde{J}_{p+1} - \tilde{J}_{p-1}\right)\right),$$

где y_0 — сечение пучка электронов, p — бетатронная гармоника в линии спектра n, φ — полярный угол, θ — азимутальный угол от оси, J_n^m и $\tilde{J}_p$ — обобщенные функции типа Бесселя:

$$J_n^m = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \times$$
$$\times \exp\left\{ i\left(n\alpha + \frac{mk^2\left(\frac{\sin(2\alpha)}{4} + \frac{2}{k}\gamma\theta\cos\varphi\sin\alpha\right)}{1+\gamma^2\theta^2 + (k^2/2)}\right)\right\},$$
$$\tilde{J}_p = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \times \tag{3}$$
$$\times \exp\left\{ i\left(p\alpha - \frac{4\pi\theta y_0\gamma^2\sin\alpha}{\lambda_u(1+k^2/2)} - \frac{\pi^2\gamma y_0^2 k\sin(2\alpha)}{\sqrt{2}\lambda_u^2(1+k^2/2)}\right)\right\}.$$

Коэффициенты Бесселя (2) и входящие в них обобщенные функции Бесселя (3) определяют генерацию гармоник и зависят от параметров пучка и ондулятора сложным образом как явно, так и неявно. Ондуляторный параметр k вместе с углом θ входит в множитель $\sim \frac{2}{k}\gamma\theta$ при функции Бесселя четных гармоник J_n^n; сечение пучка входит множителем y_0 в бетатронный вклад четных гармоник

$$f_{n;y} \propto \sum_p J_n^n \frac{\sqrt{2}\pi y_0}{\lambda_u}\left(\tilde{J}_{p+1} - \tilde{J}_{p-1}\right);$$

угловой вклад $\sim \frac{2}{k}\gamma\theta$ присутствует также в аргументе функции Бесселя J_n^m, а сечение пучка входит в аргументы бетатронных функций Бесселя $\tilde{J}_p$ как независимо, так и совместно с зависимостью от угла θ. С учетом угла электрон-фотонного взаимодействия $\bar{\theta} \approx \sigma_{x,y}/L_g$ мы оценили, что для всех основных ЛСЭ с сечением пучков $\sigma_{x,y} \approx 25$–250 мкм аргумент

$$\frac{4\pi\theta y_0\gamma^2}{\lambda_u(1+k^2/2)}$$

на порядок больше, чем аргумент

$$\frac{\pi^2\gamma y_0^2 k}{\sqrt{2}\lambda_u^2(1+k^2/2)}.$$

Итак, коэффициенты Бесселя f_n имеют сложную зависимость от многих параметров ондулятора и пучка. Ниже мы проанализируем их влияние на излучение ЛСЭ LEUTL.

Важно, что в коэффициентах Бесселя для ЛСЭ нужно учитывать в угловой зависимости эффективный угол $\bar{\theta} \approx \sigma_{x,y}/L_g$, под которым электроны в среднем «видят» излучение на длине усиления ЛСЭ и взаимодействуют с ним [27,46]. Угловой вклад от $\bar{\theta}$ является определяющим, так как этот угол обычно значительно больше, чем угол расходимости. В этом отличие от коэффициентов Бесселя для спонтанного ОИ, где определяющими являются расходимость пучка $\theta_{x,y}$ и угол между направлением на наблюдателя и осью ондулятора. Таким образом, в коэффициентах Бесселя для ЛСЭ сечение пучка $\sigma_{x,y}$ играет роль не только в бетатронных вкладах, которые имеют порядок $1/\gamma$ и малы в релятивистском случае, но и в угловых вкладах, которые определяют генерацию четных гармоник ЛСЭ. В длинном ондуляторе рентгеновских ЛСЭ возможно также отклонение пучка от оси, сравнимое с сечением пучка, (см. например, [37]). Подчеркнем зависимость величин не от эмиттанса $\varepsilon_{x,y}$, а от сечения

$$\sigma_{x,y} = \sqrt{\varepsilon_{x,y}\beta_{x,y}},$$

где

$$\beta_{x,y} = \varepsilon_{x,y}/\theta_{x,y}^2 = \sigma_{x,y}^2/\varepsilon_{x,y}$$

— параметр Твисса, и от угла θ, который включает $\bar{\theta}$; эмиттанс пучка

$$\varepsilon_{x,y} = \sigma_{x,y}\theta_{x,y}$$

в этом контексте вторичен. Бетатронные колебания в пучке конечного сечения приводят к расщеплению линии спектра гармоники излучения n на бетатронные гармоники p, которые разделены частотой, значительно меньшей частоты излучения,

$$\omega_\beta \approx \frac{\omega_n k}{\sqrt{2}n\gamma} \ll \omega_n,$$

см. [47], при $\gamma \gg 1$.

В теории вынужденного излучения важную роль играет безразмерный параметр Пирса. Он вводится в процессе приведения к безразмерному виду уравнений движения электронов и усиления волны таким образом, что продольная координата нормируется на волновое число излучаемой волны $k = \omega/c$. При этом в линейном приближении волна усиливается по следующему закону: $A(z) \propto \exp(Ckz)$, где C — параметр Пирса. Изначально параметр Пирса C был введен для излучения черенковского типа и приборов клистронного типа и только потом для

ЛСЭ и циклотронных мазеров [48]. В теории ЛСЭ продольная координата по оси прибора нормируется на волновое число ондулятора $k_u = 2\pi/\lambda_u$. Соответственно, в линейном приближении волна усиливается по закону

$$A(z) \propto \exp(\rho k_u z),$$

где ρ — параметр Пирса в ЛСЭ, который в англоязычных статьях называется иногда FEL-parameter. Параметр Пирса ρ в ЛСЭ отличается от параметра Пирса C нормировкой. Например, параметр Пирса ЛСЭ ρ определяет длину усиления:

$$L_{n,g} \approx \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3}n^{1/3}\rho_n}, \tag{4}$$

а электронный КПД ЛСЭ в режиме насыщения просто совпадает с ρ с точностью до корня из двойки [8–11], так что максимальная (впрочем, не обязательно достижимая) мощность n-й гармоники записывается следующим образом:

$$P_{F,n} \approx \sqrt{2}\rho_n P_{beam},$$

где $P_{beam} = EI_0$ — мощность пучка электронов. Здесь есть отличие от параметра Пирса C, в терминах которого ученые определяют КПД устройства как $C\gamma^2$, где γ — релятивистский масс-фактор электрона. Параметр пирса ρ для ЛСЭ записывается следующим образом (см. [8–14]):

$$\rho_n = \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{J}{4\pi i}\right)^{1/3}(\lambda_u k|f_n|)^{2/3}, \tag{5}$$

где f_n — коэффициент Бесселя (2) n-й гармоники, $J = I_0/\Sigma$ — плотность тока, I_0 — электронный ток в пучке сечения $\Sigma = 2\pi\sigma_x\sigma_y$, $i[\text{A}] = 4\pi\varepsilon_0 mc^3/e \approx 1.7045\cdot 10^4$ — константа тока Альфвена. Потери из-за конечного сечения пучка, его эмиттанса и разброса энергий увеличивают длину усиления L_g и уменьшают мощность гармоник $P_{n,F}$, которая, кроме того, не всегда достижима из-за насыщения всего ЛСЭ, которое обычно наступает ранее насыщения гармоник. Коррекция длины усиления (и, как следствие, коррекция мощности) лучше всего описывается формулой М. Кси (Ming Xie) [49, 50]:

$$L_g = L_{g0}(1+\Lambda),$$

где Λ — полином дробной степени с девятнадцатью коэффициентами. С этим неплохо согласуются формулы Д. Даттоли (G. Dattoli) [51, 52] для коррекции параметра Пирса, длины усиления и мощности:

$$\rho_n \to \frac{\rho_n}{\kappa}, \quad \kappa = \sqrt[3]{1+\frac{\lambda_u\lambda_n}{16\pi\rho_n\Sigma}}, \tag{6}$$

$$L_{n,g} \to L_{n,g}\kappa\,\Phi_n, \tag{7}$$

$$L_s \approx 1.07 L_g \ln\frac{9\eta_1 P_F}{P_0}, \tag{8}$$

$$P_{n,F} \approx \sqrt{2}\frac{\eta_1}{\kappa^2}\rho_n P_{beam}. \tag{9}$$

Большая чувствительность электрон-фотонного взаимодействия на длинах волн гармоник n к разбросу энергий электронов и другим потерям учитываются феноменологически. Так, в (6) разброс энергий σ_ε и эмиттанс $\varepsilon_{x,y}$ учитываются коэффициентами Φ и η, откалиброванными нами ранее по данным всех основных действующих ЛСЭ в диапазонах от видимого до рентгеновского [29–31]:

$$\Phi_n \approx \left(\zeta\sqrt{n} + 0.165\mu_{\varepsilon,n}^2\right)e^{0.034\mu_{\varepsilon,n}^2},$$
$$\mu_{\varepsilon,n} \approx \frac{2\sigma_e}{n^{1/3}\tilde{\rho}_n}, \tag{10}$$
$$\eta_n \approx 0.942\left(e^{-\Phi_n(\Phi_n-0.9)} + \frac{1.57(\Phi_n-0.9)}{\Phi_n^3}\right).$$

Коэффициент ζ приближенно передает зависимость от параметров Твисса и эмиттанса и имеет сложное выражение [52]; в целом он близок к единице, $\zeta \approx 1$–1.05, для большинства современных установок с малым эмиттансом, $\gamma\varepsilon \sim 10^{-6}$ м $\cdot$ рад, и только для пучков с большим эмиттансом, $\gamma\varepsilon > 10^{-5}$ м $\cdot$ рад, имеем $\zeta \approx 1.1$–1.4, что увеличивает длину усиления. Начальная мощность дается в ЛСЭ от источника затравочного излучения или в ЛСЭ с самоусилением спонтанного излучения SASE от когерентной составляющей шума электронного банча:

$$P_{0,n} \approx 1.6\rho_n^2 e\,4\pi c\,P_{beam}/I_0\lambda_n,$$

см. [53]. Мощность гармоник обычно ограничена насыщением основного тона и всего ЛСЭ, которое наступает ранее насыщения гармоники и сопровождается ростом индуцированного разброса энергий электронов. Поэтому в режиме нелинейного роста мощность насыщения n-й гармоники обычно меньше, чем $P_{F,n}$; на длине насыщения

$$L_s \approx 1.07 L_g \ln\frac{9\eta_1 P_{F,1}}{P_{0,1}}$$

оценка мощности гармоники:

$$P_{n,F} \approx \eta_n\frac{P_{1,F}}{\sqrt{n}}\left(\frac{f_n}{nf_1}\right)^2,$$

см. [51, 52]. В ней не учитываются осцилляции мощ-

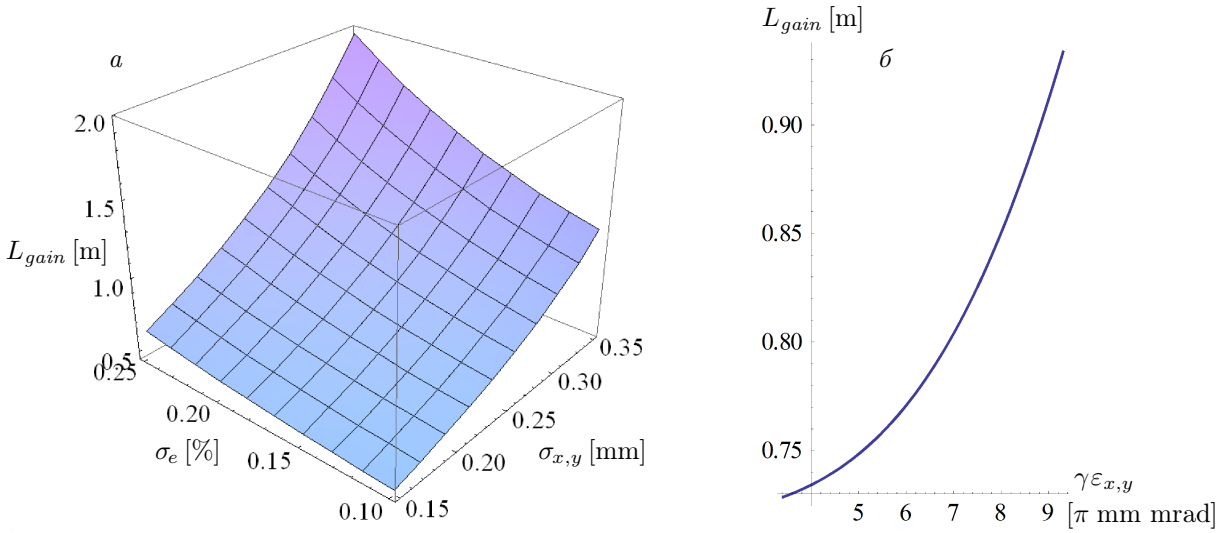

Рис. 1. Зависимости длины усиления ЛСЭ LEUTL от разброса энергий σ_e и сечения $\sigma_{x,y} \equiv \sigma$ пучка электронов с заданным параметром Твисса $\beta = 1.5$ м ($а$) и от эмиттанса пучка $\gamma\varepsilon_{x,y}$ ($б$) в эксперименте с сечением $\sigma_{x,y} = 0.25$ мм; разброс энергий электронов $\sigma_e = 0.001$; ток $I_0 = 210$ А

ности в насыщении, а также продолжающийся медленный рост мощности гармоник после насыщения основного тона. Перечисленные эффекты учтены феноменологически в формуле, выработанной нами на основе анализа поведения гармоник в режиме насыщения на длине ондуляторов $z \sim L_s$ в основных действующих в мире ЛСЭ:

$$\widehat{P}_{n,F} \approx P_{n,F}\left(\frac{z}{L_s}\right)^{\frac{n}{2}}\Bigg|_{z\sim L_s} \times \\ \times \left(0.77 + 0.23\cos\frac{n(z-L_s)}{1.3L_g}\right) - \frac{\tilde{P}_{n,F}}{2.5}, \quad (11)$$

где

$$\tilde{P}_{n,F} = P_{n,F}\Big|_{\mu_{\varepsilon,n}\to\tilde{\mu}_{\varepsilon,n},\tilde{\Phi}_n(\tilde{\mu}_{\varepsilon,n}),\eta(\tilde{\mu}_{\varepsilon,n})}, \quad (12)$$

$$\tilde{\mu}_{\varepsilon,n} \approx \frac{2n^{2/3}\sigma_e}{\tilde{\rho}_n}.$$

Теоретическое выражение для мощности (11) учитывает точные коэффициенты Бесселя (2). Результат хорошо согласуется с известными данными всех наиболее известных ЛСЭ (см. [27–33]); более того, результат (11) лучше передает экспериментальные данные мощности гармоник ЛСЭ, чем теоретические оценки в [54, 55], как показано в [30, 56, 57].

2.1. Влияние параметров пучка электронов на длину усиления ЛСЭ

Рассмотрим хорошо документированный ЛСЭ LEUTL [39, 40] с излучением на длине волны $\lambda_1 \approx 540$ нм. Данные ондулятора LEUTL: период $\lambda_u = 3.3$ см, длина секции $L_u = 2.4$ м, ондуляторный параметр $k = 3.1$, параметры пучка в ЛСЭ: ток $I_0 = 210$ А, энергия электронов $E = 217$ МэВ, разброс энергий $\sigma_e = 1\cdot10^{-3}$, средний эмиттанс $\gamma\varepsilon_{x,y} \approx \approx 6.2\pi\cdot10^{-6}$ мм·мрад, параметр Твисса $\beta_{x,y} = 1.5$ м, сечение пучка $\sigma_{x,y} = 0.25$ мм, расходимость $\theta_{div} \approx \approx 0.17$ мрад. Используем формулы (2)–(11) для анализа мощности гармоник ЛСЭ и оценим возможность подавления второй гармоники ЛСЭ.

Рассмотрим зависимость рассчитанной нами длины усиления ЛСЭ от различных параметров пучка электронов; ток считаем во всех случаях фиксированным. От гармоник поля ондулятора длина усиления практически не зависит. Зависимость длины усиления от разброса энергий электронов и от сечения пучка построена нами по формулам (6), (10) и показана на рис. 1$а$ при фиксированном значении параметра Твисса $\beta_{x,y} = 1.5$. Измеренная в эксперименте длина усиления составила $L_{gain} \approx 0.75$ м, что совпадает с нашим теоретическим результатом при заданных параметрах установки (см. рис. 1 для $\sigma_e = 0.1\,\%$). Эффективный угол взаимодействия электронов с излучением при этом составляет $\bar{\theta} \approx \sigma_{x,y}/L_{gain} \approx 0.3$ мрад, что дает значение $\gamma\bar{\theta} \approx 0.13$, в два раза большее, чем для расходимости: $\theta_{div}\gamma \approx 0.07$.

При вариации сечения пучка и фиксированном параметре Твисса $\beta_{x,y}$ эффективное изменение эмиттанса происходит только через изменение сечения. Этот случай представляется важным, так как сечение и длина усиления определяют угол $\bar{\theta}$, который, в свою очередь, в основном определяет генерацию второй гармоники ЛСЭ. Отме-

тим, что зависимость длины усиления от разброса энергий электронов $L_{gain}(\sigma_e)$ при значении сечения $\sigma_{x,y} = 0.25$ мм практически повторяет зависимость от сечения $L_{gain}(\sigma_{x,y})$ при разбросе энергий $\sigma_e = 0.001$ (см. рис. 1*a*). Это, по-видимому, совпадение, но эти значения параметров присутствуют во многих экспериментах LEUTL [39, 40]. Зависимость $L_{gain}(\sigma_{x,y})$ при постоянном токе в основном определяется изменением плотности тока J и соответствующим изменением параметра Пирса ρ (5), а также менее значимым изменением параметра κ (6), описывающего влияние эмиттанса на дифракцию пучка; в то же время влияние разброса энергий σ_e на длину усиления описывается независимо коэффициентом μ_ε(10). При малом сечении пучка электронов и соответственно малом эмиттансе длина усиления ЛСЭ LEUTL мало меняется при изменении разброса энергий в широких пределах $\sigma_e \sim 0.1$–$0.3\,\%$ (см. рис. 1*a* график при $\sigma_{x,y} = 0.1$ мм); при больших сечениях пучка, $\sigma_{x,y} \approx 0.25$ мм, длина усиления ЛСЭ увеличивается с ростом разброса энергий. При еще больших сечениях $\sigma_{x,y} \gg 0.3$ мм и заданном значении $\beta_{x,y} = 1.5$ м сильно увеличивается как длина усиления, так и ее зависимость от разброса энергий (см. рис. 1*a* при $\sigma_{x,y} = 0.4$ мм).

Рассмотрим теперь возможное влияние вариации эмиттанса пучка $\varepsilon_{x,y}$ в предположении фиксированного сечения $\sigma_{x,y}$. В этом случае изменение эмиттанса обратно пропорционально изменению параметра Твисса $\beta_{x,y}$, так что

$$\sigma_{x,y} = \sqrt{\varepsilon_{x,y}\beta_{x,y}} = \text{const}.$$

При этом не меняются плотность тока, параметр κ (6), описывающий дифракцию, и параметр Пирса ρ (5), определяющий длину усиления и мощность ЛСЭ. Мы получили, что вариация эмиттанса пучка при фиксированном сечении (см. рис. 1*б*) меняет длину усиления несколько меньше по сравнению с тем, как меняет длину усиления вариация сечения при заданном параметре Твисса (ср. с рис. 1*a*).

Выразив параметр Твисса как $\beta_{x,y} = \sigma_{x,y}^2/\varepsilon_{x,y}$, можно зафиксировать эмиттанс $\varepsilon_{x,y}$ и проанализировать в этом случае влияние сечения пучка $\sigma_{x,y}$ на длину усиления. Результат представлен на рис. 2. Он заметно отличается от графиков на рис. 1.

В ЛСЭ LEUTL значения эмиттанса менялись и в различных экспериментах составляли $\gamma\varepsilon_{x,y} \approx 5.5$–$9 \cdot 10^{-6}$ мм · мрад. На рис. 2 представлен примерно этот диапазон изменения и видно, как зависимость длины усиления от сечения качественно меняется при вариации эмиттанса. При больших сечениях зависимости от эмиттанса почти нет, при малых сечениях зависимость длины усиления от эмиттанса сильная. На рис. 2 видно, что малый эмиттанс и малое сечение позволяют уменьшить длину усиления приблизительно до 0.6 м, а при большом эмиттансе сечение меняется в небольшом интервале 1–1.2 м и виден минимум L_{gain} при значении сечения $\sigma_{x,y} \approx 0.25$ мм, что соответствует экспериментальным параметрам ЛСЭ LEUTL [39, 40]. Естественно, с практической точки зрения нужно по возможности уменьшить длину усиления, чтобы уменьшить размер и стоимость ЛСЭ. Меньшая длина усиления, кроме того, сопровождается большей мощностью ЛСЭ, что ценно.

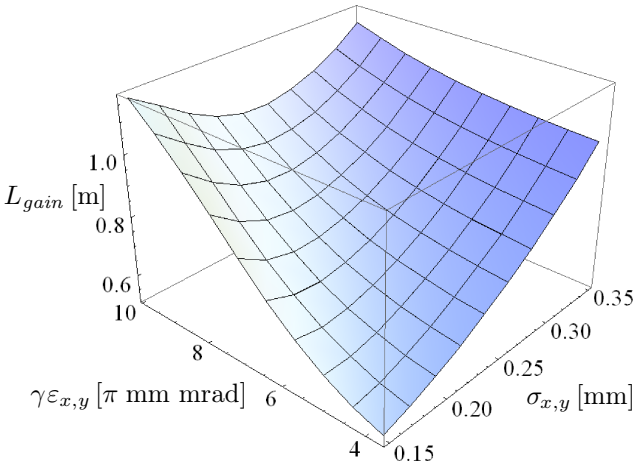

Рис. 2. Зависимость длины усиления ЛСЭ LEUTL от эмиттанса и сечения пучка с разбросом энергий $\sigma_e = 0.001$; ток $I_0 = 210$ А

Мы изучили влияние эмиттанса, сечения и разброса энергий пучка электронов на эффективный угол электрон-фотонного взаимодействия в ЛСЭ: $\bar{\theta} \approx \sigma_{x,y}/L_{gain}$. Отметим, что изменение параметров пучка приводит к изменению длины усиления ЛСЭ, что показано на рис. 1; это влияет на угол $\bar{\theta} \approx \sigma_{x,y}/L_{gain}$; кроме того, на $\bar{\theta}$ непосредственно влияет и само сечение пучка. Полученная аналитическая зависимость $\bar{\theta}(\sigma_{x,y}, \varepsilon_{x,y})$ от сечения и эмиттанса пучка в LEUTL показана на рис. 3*a,б,в*. При изменении сечения пучка за счет вариации эмиттанса и заданном в эксперименте параметре Твисса $\beta = 1.5$ м угол $\bar{\theta}$ меняется в небольших пределах, как показано на рис. 3*a*. Интересно, что зависимость $\bar{\theta}(\sigma_{x,y})$ имеет максимум (см. рис. 3*a*) и этот максимум $\bar{\theta}$ приходится примерно на измеренные экспериментальные значения LEUTL: сечение $\sigma_{x,y} \approx 0.26$ мм и эмиттанс $\gamma\varepsilon_{x,y} = 6.2\pi \cdot 10^{-6}$ мм·мрад при разбросе энергий $\sigma_e = 0.001$. При изменении эмиттанса и фиксированном в эксперименте сечении пучка угол $\bar{\theta}$ монотонно убывает с увеличени-

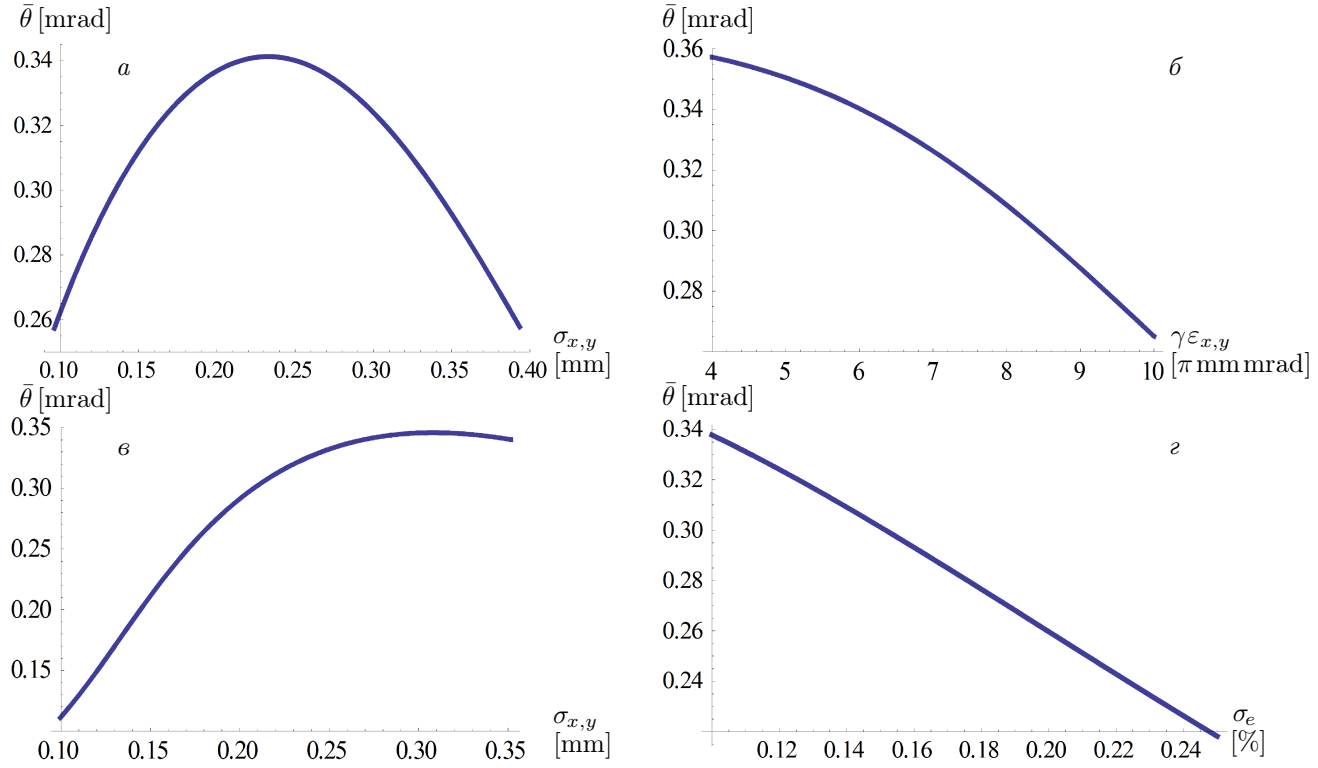

Рис. 3. Зависимости угла электрон-фотонного взаимодействия в ЛСЭ LEUTL от сечения пучка при заданных в эксперименте параметре Твисса $\beta = 1.5$ м и разбросе энергий $\sigma_e = 0.001$ ($а$); от эмиттанса при заданных в эксперименте сечении $\sigma_{x,y} = 0.26$ мм и разбросе энергий $\sigma_e = 0.001$ ($б$); от сечения при заданных в эксперименте эмиттансе $\gamma\varepsilon_{x,y} = 6.2\pi \cdot 10^{-6}$ мм · мрад и разбросе энергий $\sigma_e = 0.001$ ($в$); от разброса энергий при заданных $\gamma\varepsilon_{x,y} = 6.2\pi \cdot 10^{-6}$ мм · мрад, $\sigma_{x,y} = 0.26$ мм ($г$); $\beta = 1.5$ м; ток $I_0 = 210$ А

ем эмиттанса (см. рис. 3$б$). Таким образом, зависимость от эмиттанса на рис. 3$б$ совсем другая, чем зависимость от сечения пучка на рис. 3$а$.

Кроме того, мы изучили аналитическую зависимость $\bar{\theta}(\sigma_{x,y})$ от сечения пучка при измеренном в эксперименте эмиттансе $\gamma\varepsilon_{x,y} = 6.2\pi \cdot 10^{-6}$ мм · мрад, она представлена на рис. 3$в$. Для данного эмиттанса $\gamma\varepsilon_{x,y} = 6.2\pi \cdot 10^{-6}$ мм · мрад малые сечения ниже экспериментального дают малые углы $\bar{\theta}$: при сечении $\sigma_{x,y} < 0.2$ мм угол $\bar{\theta} < 0.28$ мрад, а при сечении $\sigma_{x,y} = 0.1$ мм угол $\bar{\theta}$ может быть в три раза меньше его значения при экспериментальных параметрах пучка (см. рис. 3$в$). Увеличение сечения пучка от $\sigma_{x,y} = 0.1$ мм до значений $\sigma_{x,y} \approx 0.25$ мм, измеренных в эксперименте, приводит к увеличению угла $\bar{\theta}$; при дальнейшем увеличении сечения выше экспериментальных значений и фиксированном эмиттансе не происходит увеличения угла $\bar{\theta}$ (см. рис. 3$в$).

Зависимость $\bar{\theta}(\sigma_e)$ от разброса энергий электронов представлена на рис. 3$г$. С увеличением разброса энергий пучка происходит практически линейное уменьшение угла электрон-фотонного взаимодействия $\bar{\theta}$. Это влияет на коэффициенты Бесселя гармоник (2) непосредственно и опосредованно через обобщенные функции Бесселя (3), которые также зависят от угловых вкладов $\bar{\theta}$. Соответственно, параметры Пирса гармоник ЛСЭ ρ_n также зависят от разброса энергий электронов; эта зависимость показана и исследована нами в разд. 3.

Отметим также, что максимальное значение $\bar{\theta}$ при всех исследованных нами изменениях параметров пучка остается примерно одним и тем же (см. рис. 3$а,б,в$). С угловыми эффектами тесно связано излучение четных гармоник ОИ. В релятивистских пучках четные гармоники излучения возникают в меньшей степени из-за бетатронных колебаний и в большей степени из-за угловых эффектов; значимый в ЛСЭ эффективный угол $\bar{\theta}$ превышает все другие угловые вклады и меняется при вариации сечения и эмиттанса незначительно (см. рис. 3$а,в$). При заданном фиксированном эмиттансе изменение угла $\bar{\theta} \approx \sigma_{x,y}/L_{gain}$ электрон-фотонного взаимодействия происходит в сторону меньших значений с отклонением сечения пучка LEUTL от его штатного значения $\sigma_{x,y} \approx 0.25$ мм (см. рис. 3$а,в$). Это дает основание предположить, что при данном эмиттансе в ЛСЭ LEUTL меньшие сечения пучка могут ослабить четные гармоники ЛСЭ.

3. ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ НА ИЗЛУЧЕНИЕ ГАРМОНИК ЛСЭ

Мы рассчитали по формулам (2)–(11) и проследили влияние параметров пучка электронов на коэффициенты Бесселя и на мощности гармоник излучения. Учтен эффективный угол электрон-фотонного взаимодействия в ЛСЭ LEUTL: $\gamma\bar{\theta} \approx 0.14$, который сильно влияет на мощность четных гармоник ЛСЭ. Зависимость коэффициентов Бесселя от сечения пучка при фиксированном в эксперименте параметре Твисса $\beta = 1.5$ м представлена графически на рис. 4*а*; фактически изменение эмиттанса в этом случае происходит за счет вариации сечения. Зависимость коэффициентов Бесселя от разброса энергий пучка электронов представлена на рис. 4*б* для данного в эксперименте эмиттанса и сечения пучка LEUTL.

Отметим, что изменение сечения при фиксированном параметре Твисса (т. е. при заданной фокусировке) мало сказывается на коэффициентах Бесселя: значение $f_1 = 0.75$ для основного тона не меняется и поэтому оно не показано на рисунках; меняются, хотя и мало, значения f_2 для второй гармоники (см. рис. 4*а*), следуя за изменением угла $\bar{\theta}$ на рис. 3*а* (оранжевая линия на рис. 4*а* следует за изгибом линии на рис. 3*а*). Интересным представляется уменьшение коэффициентов Бесселя второй гармоники f_2 по сравнению с коэффициентом Бесселя третьей гармоники f_3 при увеличении разброса энергий (см. рис. 4*б*). Это позволяет заключить (см. рис. 4*б*), что вторая гармоника, по-видимому, будет сильнее подавлена в спектре ЛСЭ при увеличенном разбросе энергий пучка. В то же время изменение сечения (см. рис. 4*а*), по-видимому, не окажет столь значительного влияния на мощность второй гармоники, как изменение разброса энергий. Для зависимости от разброса энергий на рис. 4*б* мы ограничили сверху область исследуемых значений σ_e значением параметра Пирса ρ (5) ЛСЭ исходя из условия $\sigma_e < \rho$. В отношении зависимости коэффициента Бесселя третьей гармоники f_3 от разброса энергий отметим, что небольшое увеличение f_3 с ростом разброса энергий электронов, вообще говоря, нетипично и, по-видимому, связано с уменьшением угловых вкладов в обобщенных функциях Бесселя (3) для установки ЛСЭ LEUTL.

С реальными параметрами установки в эксперименте ЛСЭ LEUTL [40] (данные приведены выше в начале разд. 2) мы аналитически получили содержание второй гармоники в излучении ЛСЭ $\approx 0.3\,\%$, что находится в пределах разброса измерений и в хорошем согласии со средним значением, измеренным во всех экспериментах: $P_2/P_1 = 1/240$ [40]. Рассчитанное содержание третьей гармоники получилось $\approx 0.8\,\%$, что также согласуется с экспериментом; рассчитанная длина усиления $L_g = 0.77$ м и длина насыщения $L_s = 16$ м точно соответствуют измеренным значениям [40].

С учетом коэффициентов Бесселя (см. рис. 4) мы аналитически рассчитали зависимости параметра Пирса ρ_n для гармоник, а также мощности излучения гармоник P_n от сечения пучка и разброса энергий электронов. Зависимости ρ_n и P_n от сечения пучка при заданном в эксперименте разбросе энергий $\sigma_e = 0.001$ представлены на рис. 5; зависимости от разброса энергий при заданном сечении $\sigma_{x,y} \approx 0.26$ мм показаны на рис. 6. Проанализируем на рис. 5 и 6 влияние параметров пучка на излучение гармоник ЛСЭ.

При увеличении сечения пучка $\sigma_{x,y}$ происходит ослабление излучения ЛСЭ вследствие уменьшения значения параметра Пирса, показанного на рис. 5*а*. С ростом сечения параметр Пирса уменьшается (см. рис. 5*а*) хотя бы потому, что увеличение сечения пучка $\sigma_{x,y}$ уменьшает плотность электронного тока в нем (при фиксированном токе I); это непосредственно влияет на параметр Пирса (5):

$$\rho_n \propto \sqrt[3]{\left(\frac{I}{\sigma_{x,y}^2}\right)|f_n|^2}.$$

Вообще говоря, обычно за изменением параметра Пирса ρ следует изменение мощности; это хорошо видно на рис. 5*б*. Из графиков на рис. 5 следует, как мы и предполагали по результатам анализа зависимости длины усиления от сечения (см. разд. 2), что влияние сечения на излучение примерно одинаково для всех гармоник $n = 1, 2, 3$ (см. рис. 5). Отметим, что мощность второй гармоники немного больше для сечений $\sigma_{x,y} \sim 0.1$–0.15 мм и не меняется при увеличении сечения пучка до $\sigma_{x,y} \approx 0.2$ мм (см. оранжевую штрихпунктирную линию на рис. 6*а*). Это происходит из-за того, что вторая гармоника ЛСЭ сильно зависит от эффективного угла $\bar{\theta}$, и ее мощность следует зависимости $\bar{\theta}$ от сечения, показанной на рис. 3*а*.

Изменение разброса энергий электронов практически не влияет на параметр Пирса нечетных гармоник (см. рис. 6*а*), но увеличение разброса энергий уменьшает параметр Пирса f_{even} четных гармоник. Это происходит главным образом потому, что f_{even} сильно зависят от угла $\bar{\theta}$, который уменьшается с ростом разброса энергий (см. рис. 3*г*). В то же время увеличение разброса энергий приводит к уменьше-

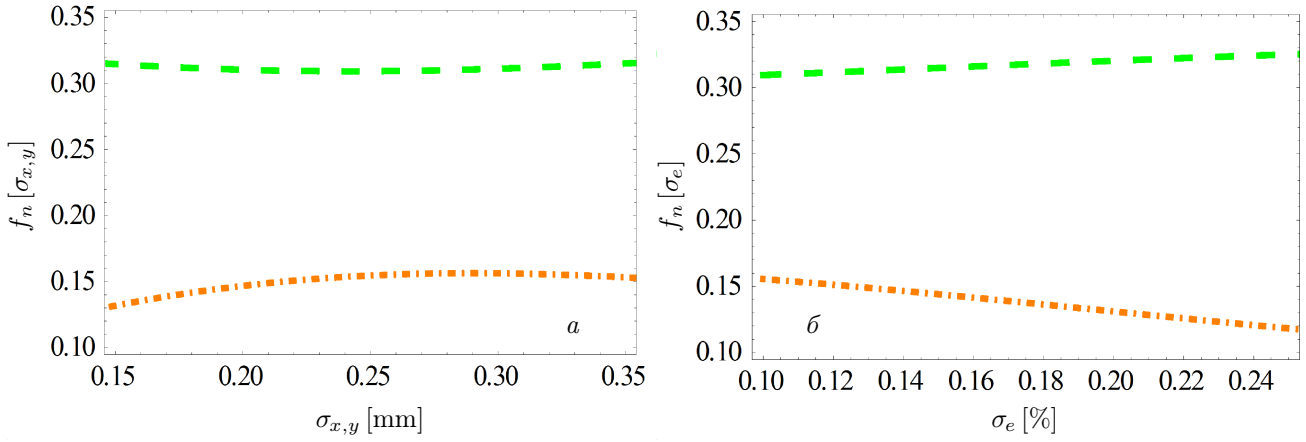

Рис. 4. Зависимости коэффициентов Бесселя f_n гармоник ЛСЭ LEUTL от сечения пучка при разбросе энергий $\sigma_e = 0.001$ ($а$) и разброса энергий при сечении пучка $\sigma_{x,y} \approx 0.26$ мм ($б$); ток $I_0 = 210$ А, параметр $\beta_{x,y} = 1.5$ м. Гармоники: $n = 2$ — штрихпунктирная оранжевая линия, $n = 3$ — штриховая зеленая линия

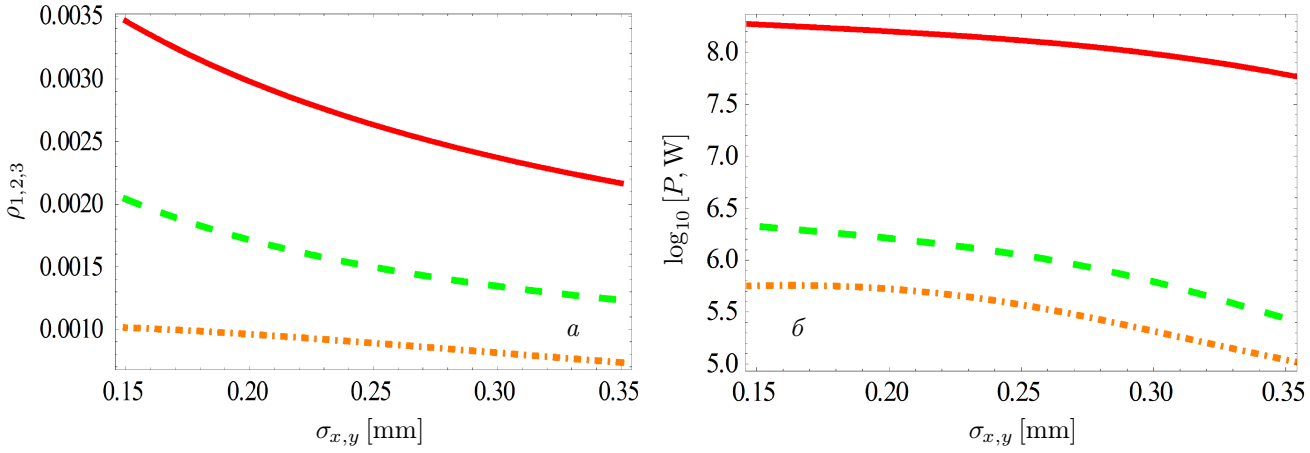

Рис. 5. Зависимости параметра Пирса гармоник ЛСЭ LEUTL ($а$) и мощности гармоник ЛСЭ LEUTL ($б$) от сечения пучка. Разброс энергий $\sigma_e = 0.001$, ток $I_0 = 210$ А, параметр Твисса $\beta_{x,y} = 1.5$ м; эмиттанс меняется с изменением сечения. Гармоники: $n = 1$ — сплошная красная линия, $n = 2$ — штрихпунктирная оранжевая линия, $n = 3$ — штриховая зеленая линия

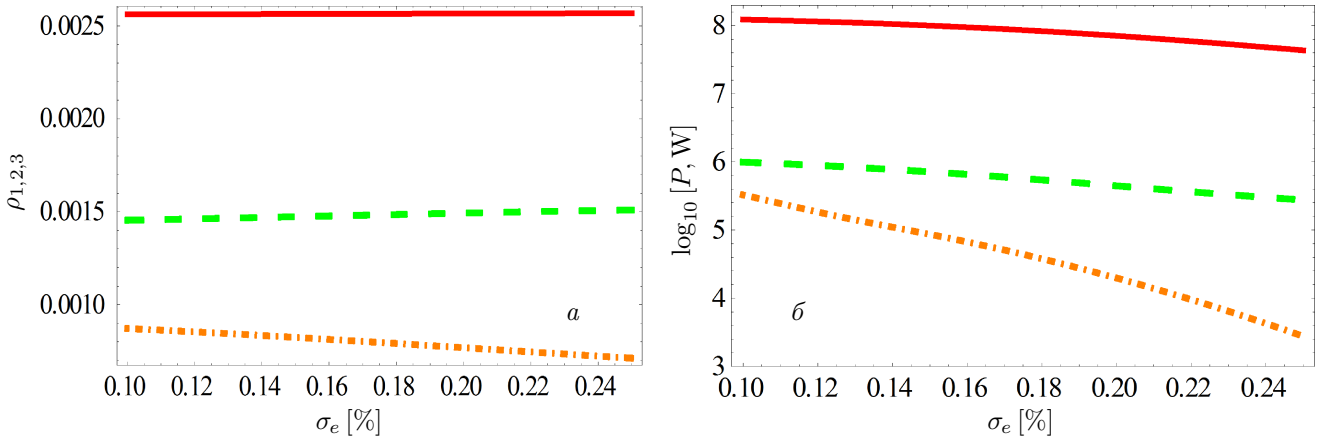

Рис. 6. Зависимости параметра Пирса гармоник ЛСЭ LEUTL ($а$) и мощности гармоник ЛСЭ LEUTL ($б$) от разброса энергий. Сечение $\sigma_{x,y} \approx 0.26$ мм, ток $I_0 = 210$ А, параметр Твисса $\beta_{x,y} = 1.5$ м, эмиттанс $\gamma\varepsilon_{x,y} = 6.2\pi \cdot 10^{-6}$ мм · мрад. Гармоники: $n = 1$ — сплошная красная линия, $n = 2$ — штрихпунктирная оранжевая линия, $n = 3$ — штриховая зеленая линия

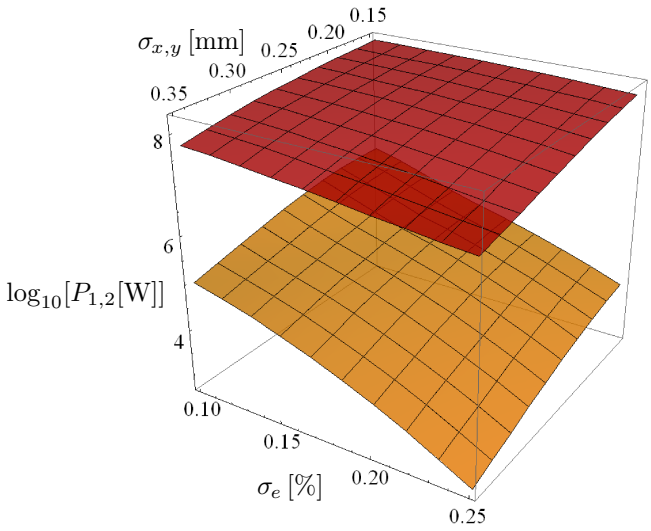

Рис. 7. Зависимость мощности первой и второй гармоник ЛСЭ LEUTL от разброса энергий и сечения пучка электронов при токе $I_0 = 210$ А; параметр Твисса $\beta_{x,y} = 1.5$ м

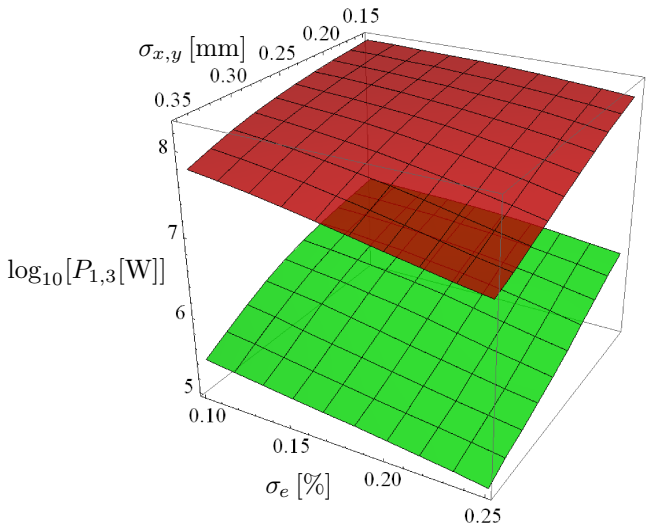

Рис. 8. Зависимость мощности первой и третьей гармоник ЛСЭ LEUTL от разброса энергий и сечения пучка электронов при токе $I_0 = 210$ А; параметр Твисса $\beta_{x,y} = 1.5$ м

нию мощности всех гармоник ЛСЭ ввиду ухудшения группировки электронов (см. рис. 6*б*). Это более выражено для второй гармоники, чем для третьей и для основного тона, что не связано с параметром Пирса, соответствующее изменение которого показано на рис. 6*а*. Для разброса энергий в широком диапазоне значений параметр Пирса первой и третьей гармоник практически не меняется, а параметр Пирса второй гармоники убывает с увеличением разброса энергии (см. рис. 6*а*), но не настолько сильно, чтобы вызвать уменьшение мощности второй гармоники ЛСЭ, представленное на рис. 6*б*. При экспериментальном сечении пучка $\sigma_{x,y} \approx 0.26$ мм увеличение разброса энергий электронов от 0.1 % до 0.25 % приводит к уменьшению мощности излучения основного тона и третьей гармоники примерно в три раза, в то время как мощность второй гармоники уменьшается более чем в сто раз. Сравнивая рис. 5 и 6, можно увидеть, что если зависимость параметра Пирса на рис. 5*а* вызывает изменения мощности на рис. 5*б*, то изменения на рис. 6*б* вызваны не только зависимостью на рис. 6*а*, где практически не меняется параметр Пирса $\rho_{1,3}$. Также ослабление излучения второй гармоники ЛСЭ на два порядка при увеличении разброса энергий от $\sigma_e = 0.1\,\%$ до $\sigma_e = 0.25\,\%$ (оранжевая штрихпунктирная линия на рис. 6*б*), по-видимому, вызвано не только изменением параметра Пирса ρ_2 (оранжевая штрихпунктирная линия на рис. 6*а*).

Сравнение влияния изменения сечения пучка и разброса энергий электронов на мощность первой и второй гармоник показано на рис. 7; сравнение влияния на мощность первой и третьей гармоник показано на рис. 8. Зависимости от сечения пучка и разброса энергий электронов качественно похожи друг на друга, особенно для первой и третьей гармоник на рис. 8. Однако одинаковые изменения параметров пучка приводят к большим изменениям мощности второй гармоники ЛСЭ, чем первой (см. рис. 7). На рис. 7 видно, что в случае увеличения разброса энергии пучка в два раза с $\sigma_e \approx 0.1\,\%$ до $\sigma_e \approx 0.2\,\%$ при заданных в экспериментах значениях эмиттанса и сечения $\sigma_{x,y} \approx 0.26$ мм мощность второй гармоники ЛСЭ уменьшится более чем в десять раз. Если при этом немного увеличить сечение с $\sigma_{x,y} \approx 0.26$ мм до $\sigma_{x,y} \approx 0.3$ мм, то вторая гармоника будет еще ослаблена. При увеличении разброса энергии до $\sigma_e \approx 0.25\,\%$ и стандартном сечении пучка $\sigma_{x,y} \approx 0.26$ мм мощность второй гармоники уменьшится примерно в сто раз, а при одновременном с этим увеличении сечения до $\sigma_{x,y} \approx 0.3$ мм получаем ослабление второй гармоники ЛСЭ примерно в двести раз (см. рис. 7). Мощность основного тона при этом меняется, но мало. Отметим, что при фиксированном значении параметра Твисса $\beta = 1.5$ м и увеличении сечения с $\sigma_{x,y} \approx 0.25$ мм до $\sigma_{x,y} \approx 0.3$ мм, а также одновременном увеличении разброса энергий с $\sigma_e \approx 0.1\,\%$ до $\sigma_e \approx 0.2\,\%$ мощность ЛСЭ уменьшится примерно в три раза, мощность второй гармоники — более чем на порядок (см. рис. 7), а длина усиления возрастет с ≈ 0.77 м до ≈ 1.33 м (см. рис. 1*а*). То же уменьшение мощности ЛСЭ ожидается при неизменном сечении $\sigma_{x,y} \approx 0.26$ мм и увеличенном в 2.5 раза разбросе энергий $\sigma_e \approx 0.25\,\%$. В этом случае длина усиления растет несколько медленнее (см. рис. 1*а*) и достигает 1.2 м.

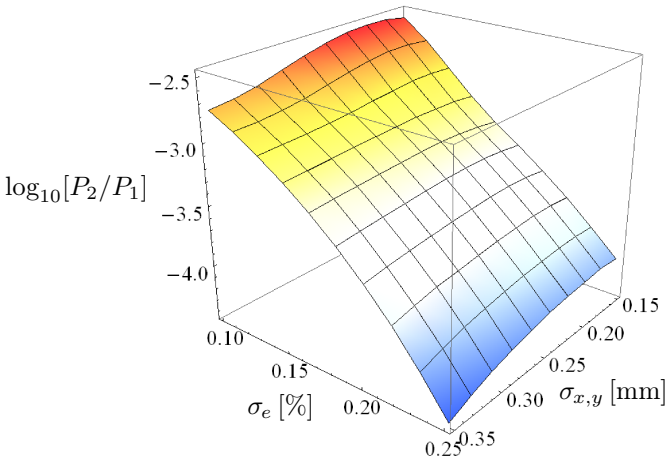

Рис. 9. Зависимость содержания второй гармоники в излучении ЛСЭ LEUTL от разброса энергий электронов и сечения пучка при токе $I_0 = 210$ А; параметр Твисса $\beta_{x,y} = 1.5$ м

Итак, используя увеличенный разброс энергий электронов при неизменном сечении пучка, получаем выигрыш в более короткой длине усиления при том же уменьшении мощности ЛСЭ, что и в случае увеличенного сечения при неизменном разбросе энергий.

Отметим, что поведение третьей гармоники ЛСЭ при изменении параметров очень похоже на поведение основного тона (ср. зеленую $n = 3$ и красную $n = 1$ поверхности на рис. 8). Содержание второй гармоники в излучении ЛСЭ LEUTL в зависимости от сечения и разброса энергии пучка показано на рис. 9. Отметим, что изменение сечения мало меняет содержание второй гармоники, а увеличение разброса энергий сильно уменьшает содержание второй гармоники. Итак, для подавления второй гармоники ЛСЭ лучше увеличить разброс энергии, а не сечение или эмиттанс пучка. Зависимость содержания второй гармоники излучения ЛСЭ от разброса энергий близка к экспоненциальной с отрицательным показателем: на рис. 9 в логарифмическом масштабе уменьшение $\log_{10}(P_2/P_1)$ с увеличением σ_e происходит почти линейно.

В заключение сравним влияние увеличенного разброса энергий электронов с влиянием второй гармоники поля ондулятора на излучение второй гармоники ЛСЭ, недавно исследованное в [57, 58]. В этих работах была продемонстрирована возможность ослабить вторую гармонику ЛСЭ, используя вторую гармонику магнитного поля ондулятора в противофазе основному полю. Согласно результатам в [57, 58], вторая гармоники поля

$$H_{2,d} = H_0 d \sin(4\pi z/\lambda_u)$$

с относительной амплитудой $d \approx -0.1$ основного поля ондулятора

$$H = H_0 \sin(2\pi z/\lambda_u)$$

позволяет уменьшить излучение второй гармоники ЛСЭ примерно на порядок (степень влияния гармоники поля зависит от параметров установки). Группировка электронов при этом идет в поле двух волн, возбуждающихся на разных ондуляторных гармониках. Если волны или их гармоники приходят в фазе, то группировка на этой длине волны происходит сильнее, а если в противофазе, то слабее. Похожий двухчастотный эффект имеет место и в циклотронных усилителях миллиметрового диапазона. Обычно стараются улучшить группировку электронных банчей; например, в [59–61] было показано, что в циклотронных мазерах использование группировки частиц в поле двух волн, возбуждающихся на первой и второй циклотронных гармониках, дает существенное улучшение группировки электронов. Влияние разброса энергии при этом не рассматривалось. Аналогично этому, варьируя амплитуду и фазу гармоники поля в ондуляторах, можно менять содержание соответствующей гармоники в излучении, почти не меняя мощность основного тона (см. [42, 44, 45, 62] и др.).

Мы сравнили и проанализировали совместное влияние второй гармоники поля ондулятора и разброса пучка электронов σ_e на мощность излучения ЛСЭ. Применив формулы (5)–(11) для аналитического вычисления мощности гармоник ЛСЭ, мы использовали коэффициенты Бесселя для двухчастотного ондулятора с учетом второй гармоники поля из [58]:

$$\begin{aligned} f_{n;x} &\approx \sum_p \tilde{J}_p \Big| (J^n_{n+1} + J^n_{n-1}) + \\ &\quad + \frac{d}{h}(J^n_{n+h} + J^n_{n-h}) + J^n_n \frac{2}{k}\gamma\theta\cos\varphi \Big|, \\ f_{n;y} &\approx \sum_p \Bigg(\tilde{J}_p \Big| J^n_n \frac{2}{k}\gamma\theta\sin\varphi \Big| + \\ &\quad + J^n_n \frac{\sqrt{2}\pi y_0}{\lambda_u} \Big(\big(\tilde{J}_{p+1} - \tilde{J}_{p-1} \big) + \\ &\quad + \frac{d}{h}\big(\tilde{J}_{p+h} - \tilde{J}_{p-h} \big) \Big) \Bigg), \end{aligned} \tag{13}$$

где d — амплитуда гармоники поля ондулятора с номером h; в частности, в интересующем нас случае $h = 2$. Коэффициенты Бесселя (13) имеют более

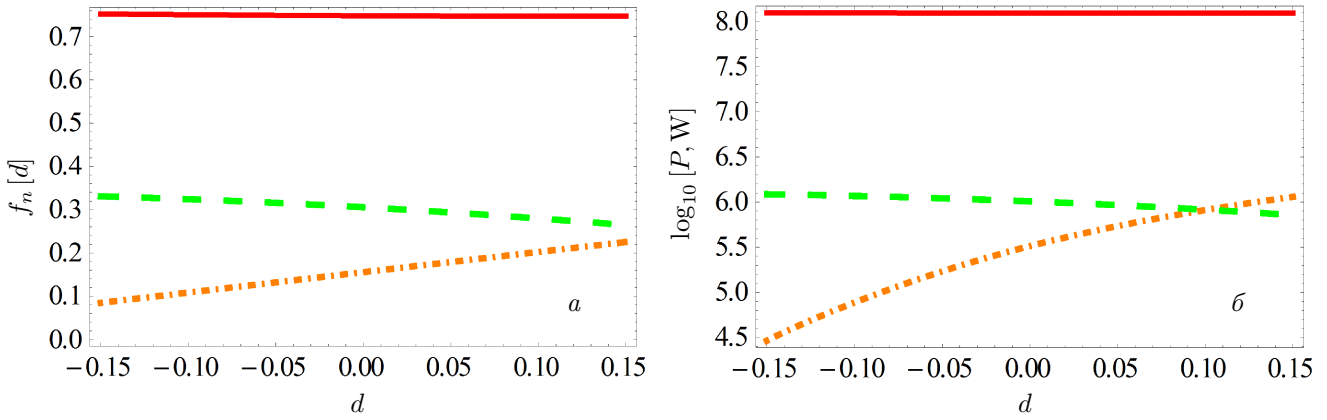

Рис. 10. Зависимости коэффициентов Бесселя f_n (a) и мощности излучения гармоник ($б$) ЛСЭ LEUTL от относительной амплитуды второй гармоники поля ондулятора d при $I_0 = 210$ А, $\sigma_{x,y} \approx 0.26$ мм, $\beta_{x,y} = 1.5$ м и $\sigma_e = 0.001$. Гармоники излучения: $n = 2$ — штрихпунктирная оранжевая линия, $n = 3$ — штриховая зеленая линия

сложный вид, чем (2) и учитывают влияние гармоники поля явно в (13) и неявно в следующих аргументах:

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{2d\gamma\theta\cos\varphi\sin(h\alpha)}{kh^2}, & \xi_1 &= \frac{\sin(2\alpha)}{4},\\
\xi_2 &= \frac{d\sin((h-1)\alpha)}{h(h-1)}, & \xi_3 &= \frac{d\sin((h+1)\alpha)}{h(h+1)},\\
\xi_4 &= \frac{d^2\sin(2h\alpha)}{4h^3}, & \xi_5 &= \frac{2}{k}\gamma\theta\cos\varphi\sin\alpha,\\
\kappa &= \frac{4\pi\theta y_0\gamma^2}{\lambda_u(1+k^2/2)}, & \eta &= \frac{\pi^2\gamma y_0^2 k}{\sqrt{2}\lambda_u^2(1+k^2/2)},
\end{aligned} \tag{14}$$

в обобщенных функциях Бесселя

$$J_n^m = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\alpha}{2\pi}\times$$
$$\times\exp\left\{i\left(n\alpha + \frac{mk^2(\xi_0+\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4+\xi_5)}{1+\gamma^2\theta^2+k_{eff}^2/2}\right)\right\}, \tag{15}$$
$$\tilde{J}_p = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\alpha}{2\pi}\exp\{i(p\alpha - \kappa\sin\alpha - \eta\sin(2\alpha))\}.$$

В результате в дополнение к полученной выше зависимости длины усиления и мощности гармоник от сечения, эмиттанса и разброса энергий пучка мы получили их зависимости от амплитуды $H_{h=2,d} = H_0 d$ второй гармоники поля ондулятора. Зависимость коэффициентов Бесселя от второй гармоники поля в ондуляторе показана на рис. 10a. Отрицательная фаза второй гармоники поля уменьшает коэффициент Бесселя f_2 второй гармоники ЛСЭ и, таким образом, уменьшается мощность ее излучения в ЛСЭ. Положительная фаза второй гармоники поля увеличивает коэффициент Бесселя f_2 (оранжевая штрихпунктирная линия на рис. 10a) и уменьшает коэффициент Бесселя третьей гармоники f_3 (зеленая штриховая линия на рис. 10a). Это приводит к соответствующему изменению мощностей этих гармоник в излучении, как показано на рис. 10$б$. Коэффициент Бесселя основного тона f_1 (красная сплошная линия на рис. 10a) не меняется под влиянием второй гармоники поля ондулятора; не меняется и мощность ЛСЭ (красная сплошная линия на рис. 10$б$), в то время как мощности излучения гармоник меняются, следуя изменению $f_{2,3}$.

Итак, варьируя амплитуду второй гармоники поля d, можно менять содержание второй гармоники излучения, не меняя мощность самого ЛСЭ; содержание третьей гармоники в спектре ЛСЭ при изменении амплитуды второй гармоники поля меняется мало (см. рис. 10$б$).

Совместное влияние второй гармоники поля ондулятора и разброса энергий пучка на содержание второй гармоники в спектре излучения ЛСЭ LEUTL показано на рис. 11.

Обратим внимание, что увеличение разброса энергий электронов и амплитуды второй гармоники поля ондулятора в противофазе основному полю взаимно усиливают подавление излучения второй гармоники ЛСЭ (см. рис. 11). При разбросе энергий $\sigma_e = 0.001$ имеем относительно слабую зависимость мощности второй гармоники излучения от амплитуды d второй гармоники поля ондулятора: при $d = -0.1$ происходит уменьшение содержания второй гармоники ЛСЭ в 5–7 раз [58], а при $d = 0$ имеем результаты, представленные выше в настоящей работе. В остальной части рис. 11 видим, что вторая гармоника поля ондулятора и разброс энергий электронов эффективно «помогают» друг другу в подавлении излучения второй гармоники ЛСЭ: при

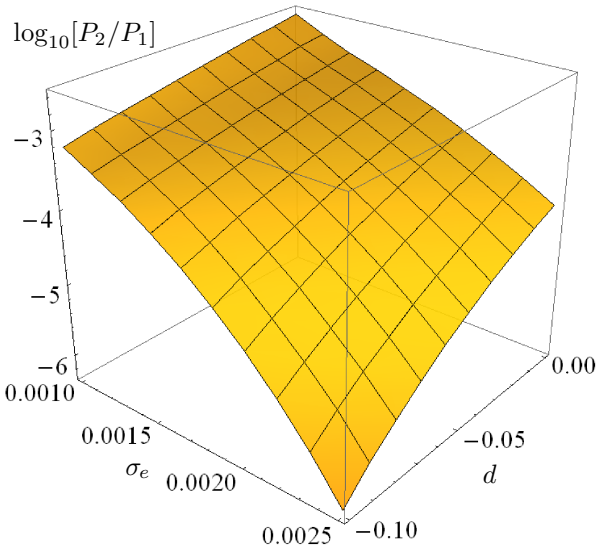

Рис. 11. Зависимость содержания второй гармоники в излучении ЛСЭ LEUTL от разброса энергий электронов и амплитуды второй гармоники поля ондулятора при следующих значениях параметров: $I_0 = 210$ А, $\beta_{x,y} = 1.5$ м, $\sigma_{x,y} = 0.26$ мм, $\gamma\varepsilon_{x,y} \approx 6.2\pi \cdot 10^{-6}$ мм · мрад

$\sigma_e = 0.0025$ вторая гармоника поля с относительной амплитудой $d = -0.1$ ослабляет излучение второй гармоники ЛСЭ на два порядка величины мощности (см. рис. 11). Отметим, что в экспериментах LEUTL со стандартным ондулятором и разбросом энергий $\sigma_e = 0.001$ содержание второй гармоники ЛСЭ составляло около 0.1–0.5 %; на рис. 11 это соответствует дальнему верхнему углу, где

$$\log_{10}\frac{P_2}{P_1}\bigg|_{d=0,\sigma_e=0.001} \approx -2.5.$$

Увеличив в два раза разброс энергий до $\sigma_e = 0.002$ и добавив в поле ондулятора в противофазе вторую гармонику амплитудой 5 % основного поля, $d = -0.05$, получаем содержание второй гармоники ЛСЭ на два порядка ниже:

$$\log_{10}\frac{P_2}{P_1}\bigg|_{d=-0.05,\sigma_e=0.002} \approx -4.5.$$

Со второй гармоникой поля амплитудой $d = -0.1$ и с увеличенным в 2.5 раза разбросом энергий $\sigma_e = 0.002$ получаем еще меньшее содержание второй гармоники в излучении ЛСЭ:

$$\log_{10}\frac{P_2}{P_1}\bigg|_{d=-0.1,\sigma_e=0.0025} \approx -6.$$

Итак, увеличение разброса энергий электронов может значительно ослабить вторую гармонику излучения, но увеличивает длину усиления ЛСЭ. Вторая гармоника поля ондулятора с обратной фазой также ослабляет излучение второй гармоники ЛСЭ и при этом не влияет на длину усиления ЛСЭ и мощность основного тона, что позволяет сохранить размеры ЛСЭ без серьезного увеличения его стоимости. Влияние второй гармоники поля несколько более эффективно при больших разбросах энергии пучка.

Дополнительный скоростной разброс электронов, по-видимому, можно устроить уже на стадии формирования сгустка в фотоинжекторе. Там энергии электронов небольшие и разброс приобретается, например, из-за кулоновских полей сгустка или из-за нерегулярности во времени ускоряющего поля (когда разные электроны ускоряются разными полями).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен теоретический анализ влияния параметров электронного пучка на излучение ЛСЭ и генерацию в нем гармоник. Рассмотрен пример хорошо документированного ЛСЭ LEUTL с излучением в видимом диапазоне на длине волны $\lambda_1 \approx 540$ нм. Использован формализм обобщенных функций Бесселя, где аналитически учтены основные параметры ЛСЭ. Результаты моделирования мощности гармоник ЛСЭ LEUTL полностью согласуются с экспериментальными данными. Проведен анализ влияния сечения, эмиттанса и разброса энергий пучка на длину усиления и мощности гармоник излучения ЛСЭ.

Аналитически показано, как увеличение разброса энергий, сечения и эмиттанса пучка увеличивает длину усиления и уменьшает мощности гармоник излучения ЛСЭ. В случае фиксированного параметра Твисса увеличение сечения происходит вследствие увеличения эмиттанса; это приводит к более значительному росту длины усиления ЛСЭ по сравнению со случаем фиксированного эмиттанса и изменения сечения вследствие вариации параметра Твисса β.

Продемонстрировано примерно одинаковое влияние увеличения сечения пучка и разброса энергий электронов на мощности первой и третьей гармоник излучения ЛСЭ LEUTL.

Показано, как вариация сечения пучка и вызываемое этим изменение длины усиления ЛСЭ меняют угол электрон-фотонного взаимодействия. Изменение угла $\bar{\theta}$ больше при фиксированном эмиттансе, чем при фиксированном параметре Твисса при одинаковой вариации сечения. Угловые эффекты, связанные с $\bar{\theta}$, в свою очередь, определяют генерацию четных гармоник ЛСЭ.

Аналитически показано, что увеличение разброса энергий электронов увеличивает длину усиления ЛСЭ и ослабляет генерацию всех гармоник излучения; особенно сильно при этом подавляются четные гармоники (ср. рис. 7 и 8). Вариация сечения пучка оказывает меньшее влияние на мощность второй гармоники, чем вариация разброса энергий электронов. Итак, для подавления второй гармоники ЛСЭ требуется, скорее, увеличение разброса энергий, а не сечения или эмиттанса пучка.

Анализ мощностей гармоник ЛСЭ LEUTL в зависимости от разброса энергий σ_e и сечения пучка $\sigma_{x,y}$ приводит к следующей оценке: независимо от сечения пучка изменение содержания второй гармоники излучения идет по закону, близкому к экспоненциальному с отрицательным показателем:

$$\log_{10} \frac{P_2}{P_1} \sim -\sigma_e,$$

см. рис. 1.

Показана возможность уменьшить на порядок содержание второй гармоники ЛСЭ LEUTL за счет увеличения разброса энергий пучка в два раза с 0.1 % до 0.2 %. Более того, увеличение разброса энергий с 0.1 % до 0.25 % уменьшает почти на два порядка содержание второй гармоники ЛСЭ. В этом случае полная мощность ЛСЭ уменьшается в несколько раз и длина усиления удваивается. Такой способ уменьшения содержания второй гармоники ЛСЭ представляется наиболее простым и осуществим, например, путем увеличения разброса энергий электронов уже в фотоинжекторе.

Уменьшение мощности второй гармоники ЛСЭ возможно при помощи второй гармоники поля ондулятора в противофазе основному полю. Показано, что влияние второй гармоники поля ондулятора и увеличенного разброса энергий электронов взаимно усиливают друг друга и эффективно подавляют излучение второй гармоники ЛСЭ. Увеличение в два раза разброса энергий электронов с $\sigma_e = 0.1\,\%$ до $\sigma_e = 0.2\,\%$ и одновременное использование ондулятора со второй гармоникой поля с амплитудой 5 % основного поля уменьшает содержание второй гармоники ЛСЭ на два порядка. Увеличение разброса энергий до $\sigma_e = 0.25\,\%$ и вторая гармоника поля с амплитудой 10 % основного поля еще уменьшают содержание второй гармоники ЛСЭ до значения $P_2/P_1 \sim 0.0001\,\%$.

Использование двухчастотного ондулятора с гармоникой поля сложно реализовать технически, но это позволяет менять содержание второй гармоники в спектре, не меняя полную мощность излучения и не меняя длину усиления ЛСЭ.

Полученные результаты могут использоваться в теоретических и прикладных исследованиях и проектировании экспериментов при анализе нелинейного отклика второй гармоники (SHG) с источником когерентного излучения ЛСЭ.

Благодарности. Автор благодарит I. Papp за оформление статьи в формате LaTeX.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант № 075-15-2021-1353).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Изв. АН СССР (Физика) **11**, 165 (1947).
2. H. Motz, W. Thon, and R. N. J. Whitehurst, Appl. Phys. **24**, 826 (1953).
3. J. M. Madey, J. Appl. Phys. **42**, 1906 (1971).
4. G. Margaritondo, Rivista del Nuovo Cimento **40**, 411 (2017).
5. В. Г. Багров, Г. С. Бисноватый-Коган, В. А. Бордовицын и др., *Теория излучения релятивистских частиц*, Физматлит, Москва (2002).
6. И. М. Тернов, В. В. Михайлин, В. Р. Халилов, *Синхротронное излучение и его применения*, Изд-во МГУ, Москва (1980).
7. G. Margaritondo, *Characteristics and Properties of Synchrotron Radiation*, in *Synchrotron Radiation*, ed. by S. Mobilio, F. Boscherini, and C. Meneghini, Springer, Berlin, Heidelberg (2015).
8. B. W. J. McNeil and N. R. Thompson, Nature Photonics **4**, 814 (2010).
9. C. Pellegrini, A. Marinelli, and S. Reiche, Rev. Mod. Phys. **88**, 015006 (2016).
10. P. Schmuser, M. Dohlus, J. Rossbach, and C. Behrens, *Free-Electron Lasers in the Ultraviolet and X-Ray Regime*, Springer Tracts Mod. Phys., 258, Cham (ZG): Springer Int. Publ. (2014).
11. Z. Huang and K. J. Kim, Phys. Rev. ST Accel. Beams **10**, 034801 (2007).
12. G. Margaritondo and P. R. Ribic, J. Synchrotron Rad. **18**, 101 (2011).
13. E. L. Saldin, E. A. Schneidmiller, and M. V. Yurkov, *The Physics of Free Electron Lasers*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2000).
14. R. Bonifacio, C. Pellegrini, and L. Narducci, Opt. Comm. **50**, 373 (1984).
15. T. Sumi, M. Horio, T. Senoo et al., E-J. Surf. Sci. Nanotech. **20**, 31 (2021), DOI: 10.1380/ejssnt.2022-002.
16. S. Shwartz, M. Fuchs, J. B. Hastings et al., Phys. Rev. Lett. **112**, 163901 (2014).

17. S. Yamamoto, T. Omi, H. Akai et al., Phys. Rev. Lett. **120**, 223902 (2018).

18. E. Berger, S. Jamnuch, C. Uzundal et al., arXiv: 2010.03134.

19. R. K. Lam, S. L. Raj, T. A. Pascal et al., Phys. Rev. Lett. **120**, 023901 (2018).

20. L. Wu, S. Patankar, T. Morimoto et al., Nature Phys. **13**, 350 (2016).

21. M. Nuriya, S. Fukushima et al., Nature Commun. **7**, 11557 (2016).

22. C. P. Schwartz, S. L. Raj, S. Jamnuch et al., arXiv: 2005.01905.

23. P. J. Campagnola and L. M. Loew, Nature Biotechnol. **21**, 1356 (2003).

24. T. Helk, E. Berger, S. Jamnuch et al., Sci. Adv. **7**, 2265 (2021).

25. G. Boyd, T. Bridges, and E. Burkhardt, IEEE J. Quant. Electron. **4**, 515 (1968).

26. G. C. Bhar, S. Das, and K. L. Vodopyanov, Appl. Phys. B **61**, 187 (1995).

27. K. Zhukovsky, Opt. Laser Technol. **131**, 106311 (2020).

28. K. Zhukovsky, Eur. Phys. J. Plus **136**, 714 (2021).

29. K. Zhukovsky, Ann. Phys. **533**, 2100091 (2021).

30. K. Zhukovsky, Rad. Phys. Chem. **189**, 109698 (2021).

31. K. Zhukovsky, Opt. Laser Technol. **143**, 107296 (2021).

32. K. Zhukovsky, Results Phys. **19**, 103361 (2020).

33. K. Zhukovsky and I. Fedorov, Symmetry **13**, 135 (2021).

34. J. R. Henderson, L. T. Campbell, H. P. Freund, and B. W. J. McNeil, New J. Phys. **18**, 062003 (2016).

35. H. P. Freund, P. J. M. van der Slot, D. L. A. G. Grimminck et al., New J. Phys. **19**, 023020 (2017).

36. H. P. Freund and P. J. M. van der Slot, New J. Phys. **20**, 073017 (2018).

37. P. Emma, R. Akre, J. Arthur et al., Nature Photonics **4**, 641 (2010).

38. D. Ratner, A. Brachmann, F. J. Decker et al., Phys. Rev. ST Accel. Beams **14**, 060701 (2011).

39. S. V. Milton, E. Gluskin, N. D. Arnold et al., Science **292**, 2037 (2001).

40. S. G. Biedron et al., Nucl. Instrum. Meth. A **483**, 94 (2002).

41. L. Giannessi et al., Phys. Rev. ST Accel. Beams **14**, 060712 (2011).

42. К. В. Жуковский, Изв. вузов. Физика **62**, 109 (2019) [K. V. Zhukovsky, Russ. Phys. J. **62** (6), 1043 (2019)].

43. H. P. Freund and P. J. M. van der Slot, J. Phys. Commun. **5**, 085011 (2021).

44. K. Zhukovsky and A. Kalitenko, J. Synchrotron Rad. **26**, 159 (2019).

45. К. В. Жуковский, А. М. Калитенко, Изв. вузов. Физика **62**, 153 (2019) [K. V. Zhukovsky and A. M. Kalitenko, Russ. Phys. J. **62** (2), 354 (2019)].

46. К. В. Жуковский, УФН **191**, 318 (2021) [K. V. Zhukovsky, Physics-Uspekhi **64**, 304 (2021)].

47. B. Prakash, V. Huse, M. Gehlot, and G. Mishra, Optik **127**, 1639 (2016).

48. V. L. Bratman, N. S. Ginzburg, and M. I. Petelin, Opt. Comm. **30**, 409 (1979).

49. M. Xie, Nucl. Instrum. Meth. A **445**, 59 (2000).

50. M. Xie, *Proc. 1995 Particle Accelerator Conf.*, IEEE, Piscataway, NJ, 183 (1995).

51. G. Dattoli, P. L. Ottaviani, and S. Pagnutti, J. Appl. Phys. **97**, 113102 (2005).

52. G. Dattoli, L. Giannessi, P. L. Ottaviani, and C. Ronsivalle, J. Appl. Phys. **95**, 3206 (2004).

53. L. Giannessi, *Seeding and Harmonic Generation in Free-Electron Lasers, Synchrotron Light Sources and Free-Electron Lasers*, ed. by E. J. Jaeschke et al., Switzerland, Springer Int. Publ. (2016), DOI: 10.1007/ 978-3-319-14394-1_3.

54. Z. Huang and K.-J. Kim, Nucl. Instrum. Meth. A **475**, 112 (2001).

55. G. Geloni, E. Saldin, E. Schneidmiller, and M. Yurkov, Opt. Comm. **271**, 207 (2007).

56. K. Zhukovsky, I. Fedorov, and N. Gubina, Opt. Laser Technol. **159**, 108972 (2023).

57. K. Zhukovsky, Europhys. Lett. **141**, 45002 (2023).

58. К. В. Жуковский, ЖЭТФ **164**, 315 (2023) [K. V. Zhukovsky, JETP **137**, 271 (2023)].

59. A. V. Savilov and G. S. Nusinovich, Phys. Plasmas **14**, 053113 (2007).

60. D. D. Krygina, N. Y. Peskov, and A.V. Savilov, *Frequency Multiplication in a Powerful Terahertz Free-Electron Maser, 2021 46th Int. Conf. on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Chengdu, China (2021), DOI: 10.1109/IRMMW-THz50926.2021.9567533.

61. A. V. Savilov and G. S. Nusinovich, Phys. Plasmas **15**, 013112 (2008).

62. А. М. Калитенко, К. В. Жуковский, ЖЭТФ **157**, 394 (2020) [A. M. Kalitenko and K. V. Zhukovskii, JETP **130**, 327 (2020)].