ЖЭТФ, 2024, том 166, вып. 1 (7), стр. 110–120 © 2024

ДВУМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЯЧЕЙКЕ

И. В. Колоколов[*], *В. В. Лебедев*

НИУ Высшая школа экономики
101000, Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 декабря 2023 г.,
после переработки 3 декабря 2023 г.
Принята к публикации 6 декабря 2023 г.

Представлена теория двумерной турбулентности, возбуждаемой внешней силой в тонких пленках жидкости на масштабах, превышающих толщину пленки. Основной особенностью двумерной турбулентности является тенденция к генерации движений все большего и большего масштаба благодаря нелинейному взаимодействию. Тенденция приводит к образованию так называемого обратного каскада и, при некоторых условиях, больших когерентных вихрей. Мы обсуждаем профиль средней скорости когерентных вихрей и флуктуации потока на фоне средней скорости для различных режимов. Мы демонстрируем, что режим сильно взаимодействующих флуктуаций приводит к анизотропному скейлингу внутри когерентных вихрей.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S0044451024070113

1. ВВЕДЕНИЕ

Для нас большая честь представить эту работу для выпуска, посвященного 130-летию П. Л. Капицы. Открытие Петром Леонидовичем сверхтекучести значительно расширило наши представления о возможных гидродинамических эффектах. Гидродинамика все еще продолжает удивлять нас разнообразием связанных с ней явлений. В этой статье мы излагаем современное состояние теории двумерной турбулентности, которая активно развивается в последние годы.

Мы рассматриваем турбулентные состояния тонких пленок жидкости, характеризующиеся интенсивными хаотическими течениями. На масштабах, превышающих толщину пленки, гидродинамические движения в таких пленках можно рассматривать как двумерные [1]. Другими системами, в которых можно эффективно создавать двумерные гидродинамические движения, являются свободно подвешенные мыльные или смектические пленки [2, 3]. Отметим также существование эффективно двумерной подсистемы быстро вращающейся трехмерной жидкости [4, 5]. Турбулентные состояния в упомянутых системах существенно отличаются от трехмерной турбулентности.

Турбулентность может быть вызвана постоянно действующей силой или развиваться без внешнего воздействия. Первый случай называется вынужденной турбулентностью, а второй — затухающей турбулентностью. Затухающая турбулентность во многих аспектах аналогична вынужденоой, однако имеет некоторые особенности, которые выходят за рамки нашей статьи. Здесь мы рассмотриваем турбулентность, вызываемую внешней силой, которая может быть статической или может быть хаотической функцией времени. Во втором случае мы предполагаем, что сила обладает стационарными статистическими свойствами. Кроме того, можно рассматривать силу, периодически изменяющуюся во времени. Во всех этих случаях турбулентное состояние, будучи состоянием с сильными флуктуациями, обладает стационарными статистическими свойствам.

Уже первые теоретические работы, посвященные двумерной турбулентности [6–8], выявили ее принципиальное отличие от трехмерной. С теоретической точки зрения, различие связано с существованием двух квадратичных положительно определенных величин (кинетической энергии и энстрофии), сохраняемых двумерным уравнением Эйлера. Это приводит к формированию двух различных каска-

[*] E-mail: igor.kolokolov@gmail.com

дов, возникающих в результате нелинейного взаимодействия: энстрофия переносится с масштаба накачки на меньшие масштабы (прямой каскад), тогда как энергия переносится на большие масштабы (обратный каскад). Энстрофия диссипирует вследствие вязкости на масштабах, меньших длины накачки, а энергия — вследствие трения о дно на масштабах, больших длины накачки.

Статистические свойства флуктуаций скорости в обратном каскаде изучались как экспериментально [9], так и численно [10]. Результаты этих работ хорошо согласуются с аналитической теорией, разработанной для неограниченной системы [11]. Замечательно, что в обратном каскаде наблюдается нормальный колмогоровский скейлинг [10]. Нормальный скейлинг в двумерном случае контрастирует с аномальным скейлингом, наблюдаемым в трехмерной турбулентности [12]. Прямой каскад (каскад энстрофии) характеризуется своими собственными скейлинговыми законами [13, 14].

Для трехмерного течения в жидкости единственным механизмом диссипации кинетической энергии является вязкость. Таким образом, существует единственный безразмерный параметр — число Рейнольдса, характеризующий степень нелинейности для несжимаемого потока. Напротив, при рассмотрении эффективно двумерных тонких пленок жидкости мы имеем дело с двумя диссипативными механизмами: вязкостью и трением о дно. Конечно, трение о дно также сводится к вязкости, но действующей на масштабах порядка толщины пленки. Поэтому при двумерном анализе вязкость и трение о дно следует разделять. Взаимная игра диссипативных механизмов приводит к более сложному характеру нелинейности течения в двумерной турбулентности.

Традиционным способом создания потока в двумерной гидродинамике является приложение к жидкости внешней периодической в пространстве статической силы (силы Колмогорова). Такая постановка задачи используется как в лабораторных экспериментах с тонкими пленками жидкости [9, 15–17], так и в численном моделировании [18–20]. Тогда переход к турбулентности оказывается сложным процессом. Это может быть плавный переход или скачок (в зависимости от соотношения между длиной накачки и размером ячейки), и он может проходить через несколько промежуточных стадий. Другой возможностью, реализуемой во многих численных экспериментах, является случайная сила с малым временем корреляции [10, 21–25].

При интенсивной накачке обратный каскад, переносящий энергию на большие масштабы, приводит к накоплению энергии на размере ячейки. Накопление может привести к образованию когерентных вихрей с размерами, сравнимым с размером ячейки. Когерентные вихри являются долгоживущими и обладают хорошо определенным средним профилем скорости. Как показывают численное моделирование и лабораторный эксперимент, профиль изотропен и соответствует дифференциальному вращению. Как было впервые продемонстрировано в работе [22], где была численно исследована модель коротко коррелированной по времени силы накачки, профиль скорости является плоским, т. е. средняя полярная скорость не зависит от расстояния до центра вихря. В дальнейшем это наблюдение было подтверждено численным моделированием [24] и лабораторным экспериментом [17], а также были представлены теоретические аргументы, объясняющие плоский профиль [26–29]. Условия, необходимые для возникновения когерентных вихрей, обсуждались в работе [20].

Приведем план нашего последующего изложения. В разд. 2 мы даем основные соотношения, касающиеся двумерных гидродинамических течений. В разд. 3 мы приводим сведения о двумерной турбулентности в неограниченных жидких пленках. В разд. 4 мы устанавливаем уравнения, описывающие когерентный вихрь. В разд. 5 мы анализируем флуктуации внутри когерентного вихря в так называемом квазилинейном режиме. В разд. 6 мы исследуем режим сильно взаимодействующих флуктуаций внутри когерентного вихря. В разд. 7 мы кратко излагаем результаты анализа, обсуждаем возможные перспективы и связь с другими физическими явлениями.

2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Двумерное течение жидкости описывается его (двумерным) полем скоростей $\mathbf{v}$, которое является функцией времени и двух координат. Мы предполагаем, что течение несжимаемо: $\nabla\mathbf{v} = 0$. Это свойство подразумевает, что число Маха v/c мало, где c — скорость звука. Это условие обычно хорошо выполняется в реальных турбулентных потоках. В данном разделе мы формулируем основные уравнения, описывающие двумерную гидродинамику несжимаемой жидкости.

Имея в виду динамику тонких пленок, мы используем двумерное уравнение Навье – Стокса, дополненное членом, относящимся к трению о дно:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p = -\alpha\mathbf{v} + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{f}$ — внешняя сила (на единицу массы), p — давление (на единицу массы), ν — коэффициент кинематической вязкости, α — коэффициент трения о дно. Беря дивергенцию уравнения (1) и используя условие несжимаемости $\nabla\mathbf{v} = 0$, мы находим следующее соотношение для поля давления p:

$$\nabla^2 p = -(\partial_\lambda v_\mu)(\partial_\mu v_\lambda). \qquad (2)$$

Здесь греческие индексы, пробегающие значения $1, 2$, обозначают векторные компоненты вдоль двух ортогональных осей. При выводе соотношения (2) мы полагали, что $\nabla\mathbf{f} = 0$.

Мы считаем, что сила накачки $\mathbf{f}$ имеет характерный волновой вектор k_f. Тогда νk_f^2 — вязкое затухание на масштабе накачки. Поучительно сравнить это затухание с α. Для тонких жидких пленок легко получить неравенство $\alpha \gg \nu k_f^2$, так как α оценивается как νh^{-2}, где h — толщина пленки. Характерная длина силы накачки должна быть больше, чем h (в противном случае течение нельзя рассматривать как двумерное), таким образом, $k_f h \gtrsim 1$. Это приводит к выводу $\alpha \gtrsim \nu k_f^2$.

Однако, чтобы наблюдать эффекты, связанные, скажем, с интенсивными крупномасштабными вихрями в турбулентном режиме, следует сделать α как можно меньше. Для достижения цели используются некоторые экспериментальные приемы, связанные с многослойными пленками [9, 16, 17]. Отметим также, что коэффициент α мал по сравнению с νk_f^2 для двумерной подсистемы быстро вращающейся трехмерной жидкости [4, 5], для которой эффективный коэффициент трения обусловлен конвективным движением, сопровождающимся формированием пограничных слоев Экмана [30]. Другими случаями, когда реализуются малые значения α, являются свободно подвешенные мыльные или смектические пленки, которые не контактируют с твердой поверхностью [2, 3].

В двух измерениях удобно описывать течение в терминах завихренности ϖ, определяемой как

$$\varpi = \operatorname{curl}\mathbf{v} \equiv \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1. \qquad (3)$$

Очевидно, что завихренность ϖ является скалярным (или, точнее, псевдоскалярным) полем. Уравнение, управляющее полем завихренности, получается взятием ротора от уравнения (1):

$$\partial_t \varpi + \mathbf{v}\nabla\varpi = -\alpha\varpi + \nu\nabla^2\varpi + \phi, \qquad (4)$$

где $\phi = \operatorname{curl}\mathbf{f}$. Отметим, что давление p выпадает из уравнения (4) для завихренности.

Чтобы замкнуть уравнение (4), необходимо восстановить поле скоростей $\mathbf{v}$ из поля завихренности ϖ. В силу условия несжимаемости $\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = 0$ можно ввести функцию тока ψ, связанную с компонентами скорости и завихренностью, как

$$v_1 = \partial_2\psi, \quad v_2 = -\partial_1\psi, \quad \varpi = -\nabla^2\psi. \qquad (5)$$

Чтобы выразить функцию тока через ϖ, необходимо решить уравнение Лапласа $\nabla^2\psi = -\varpi$. Вообще говоря, это уравнение должно решаться с подходящими граничными условиями. Для неограниченной системы можно использовать соотношение

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi}\int d^2x\, \varpi(\mathbf{x}) \ln|\mathbf{r} - \mathbf{x}|. \qquad (6)$$

После вычисления интеграла компоненты скорости находятся в соответствии с уравнением (5), таким образом выражая скорость в терминах завихренности.

Для слабого внешнего воздействия нелинейным членом $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ в уравнении (1) можно пренебречь, и мы приходим к линейному уравнению. В терминах завихренности оно принимает вид

$$(\partial_t + \alpha - \nu\nabla^2)\varpi = \phi. \qquad (7)$$

Это уравнение описывает ламинарный поток, вызываемый внешним воздействием. Из-за наличия диссипации (вязкости и трения о дно) после некоторого переходного процесса течение становится стационарным, если сила $\mathbf{f}$ постоянна. Если сила $\mathbf{f}$ случайна со статистикой, стационарной во времени, то скорость $\mathbf{v}$ в ламинарном режиме также будет случайной со статистикой, стационарной во времени.

Влияние внешней силы на течение можно охарактеризовать ее средней мощностью (на единицу массы) $\epsilon = \langle \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\rangle$, где угловые скобки означают усреднение по времени. Величину ϵ часто называют потоком энергии. Как правило, среднее значение $\langle \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\rangle$ зависит от координат. Мы предполагаем, что эта зависимость плавная, т. е. ее характерная длина больше характерных масштабов турбулентных пульсаций. Тогда неоднородность ϵ не существенна для теоретической схемы.

Простой анализ роли нелинейности, основанный на размерных оценках, показывает, что имеются два безразмерных параметра, характеризующих силу гидродинамического нелинейного взаимодействия,

$$\beta_\nu = \frac{\epsilon}{\nu^3 k_f^4}, \qquad \beta_\alpha = \frac{\epsilon k_f^2}{\alpha^3}. \qquad (8)$$

Первый параметр β_ν в уравнении (8) является степенью числа Рейнольдса, взятого на длине накачки k_f^{-1}. Второй параметр β_α в уравнении (8) связан с трением о дно и характеризует его роль на той же длине накачки.

Если выполняются неравенства $\beta_\alpha \gg 1$ и $\beta_\nu \gg 1$, то возбуждается развитая турбулентность и возникают пульсации разного масштаба за счет нелинейного взаимодействия флуктуаций потока. Энергия, производимая внешней силой на масштабе k_f^{-1}, течет к большим масштабам, в то время как энстрофия, производимая той же силой на масштабе k_f^{-1}, течет на малые масштабы [6–8]. Таким образом, образуются два каскада: каскад энергии (обратный каскад), реализуемый в масштабах, больших, чем масштаб накачки k_f^{-1}, и каскад энстрофии (прямой каскад), реализуемый в масштабах, меньших, чем масштаб накачки k_f^{-1}.

3. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СИСТЕМЕ

Здесь мы рассматриваем двумерную турбулентность в большой ячейке, где ее конечные размеры не играют существенной роли. Для описания турбулентности в данном случае можно использовать модель изотропной и однородной в пространстве и времени турбулентности. Конечно, тогда сила накачки также должна быть изотропной и однородной в пространстве и времени, по крайней мере, в статистическом смысле.

Умножая динамическое уравнение (1) на $\mathbf{v}$ и усредняя его, мы получаем баланс энергии

$$\epsilon \equiv \langle \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\rangle = \alpha\langle v^2\rangle + \nu\langle(\nabla_\alpha \mathbf{v})^2\rangle. \tag{9}$$

Напомним, что угловые скобки означают усреднение по времени или, что более удобно при теоретическом анализе, усреднение по статистике системы. При выводе уравнения (9) мы опустили все полные производные по времени и координатам, имея в виду однородность в пространстве и времени. Соотношение (9) имеет простой физический смысл: энергия, закачиваемая в жидкость внешней силой, диссипирует за счет трения о дно и вязкости.

Аналогично, умножая уравнение (4) на ϖ и усредняя, получаем еще одно уравнение баланса

$$\eta \equiv \langle \phi\varpi\rangle = \alpha\langle \varpi^2\rangle + \nu\langle(\nabla\varpi)^2\rangle. \tag{10}$$

Опять же, при выводе уравнения (10) мы опустили все полные производные по времени и координатам, имея в виду однородность в пространстве и времени.

Величину η часто называют потоком энстрофии, ее можно оценить как $\eta \sim \epsilon k_f^2$. Соотношение (10) имеет простой физический смысл: энстрофия, закачиваемая в жидкость, диссипирует за счет трения о дно и вязкости.

Можно вывести важные соотношения для каскадов энергии и энстрофии, следуя схеме Колмогорова [31, 32]. В случае изотропной, однородной в пространстве турбулентности для обратного каскада энергии имеет место соотношение [6–8]

$$\left\langle \left\{ \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot[\mathbf{v}(\mathbf{r}_1)-\mathbf{v}(\mathbf{r}_2)]\right\}^3\right\rangle = \frac{3}{2}\epsilon r, \tag{11}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $r \gg k_f^{-1}$ и угловые скобки, как и выше, означают усреднение по времени. Аналогичное соотношение для прямого каскада энстрофии имеет вид

$$\left\langle \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot[\mathbf{v}(\mathbf{r}_1)-\mathbf{v}(\mathbf{r}_2)]\,[\varpi(\mathbf{r}_1)-\varpi(\mathbf{r}_2)]^2\right\rangle = -2\eta r. \tag{12}$$

Здесь $r \ll k_f^{-1}$. Отметим противоположные знаки в правых частях уравнений (11), (12), отражающие противоположные направления потоков энергии и энстрофии.

Основываясь на соотношении (11), можно сформулировать следующую оценку для разности скоростей в области обратного каскада:

$$|\mathbf{v}(\mathbf{r}_1)-\mathbf{v}(\mathbf{r}_2)| \sim (\epsilon r)^{1/3}, \tag{13}$$

где $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Справедливость оценки (13) подтверждается лабораторным экспериментом и численным моделированием [9,10]. В этом состоит отличие двумерной турбулентности от трехмерной, где наблюдается аномальный скейлинг [12]. Для прямого каскада оценка разности скоростей, основанная на соотношении (12), выглядит следующим образом:

$$|\mathbf{v}(\mathbf{r}_1)-\mathbf{v}(\mathbf{r}_2)| \sim (\epsilon k_f^2)^{1/3} r. \tag{14}$$

Оценка (14) справедлива с точностью до логарифмических поправок [13, 14].

Сравнивая нелинейный член и член с трением о дно в уравнении (1), мы находим из соотношения (13), что каскад энергии завершается на масштабе порядка L_α,

$$L_\alpha = \epsilon^{1/2}\alpha^{-3/2}. \tag{15}$$

Аналогично, сравнивая нелинейный член и «вязкий» член в уравнении (1) и используя оценку (14), мы приходим к выводу, что каскад энстрофии завершается из-за вязкости на масштабе порядка L_ν,

$$L_\nu = \nu^{1/2}\eta^{-1/6} \sim \nu^{1/2}(\epsilon k_f^2)^{-1/6}. \tag{16}$$

Неравенства $\beta_\alpha \gg 1$ и $\beta_\nu \gg 1$ эквивалентны неравенствам $k_f L_\alpha \gg 1$ и $k_f L_\nu \ll 1$. Таким образом, существуют области выше и ниже длины накачки k_f^{-1}, где реализуются обратный и прямой каскады.

В соответствии с оценками (11), (12) градиент скорости не зависит от масштаба в прямом каскаде и уменьшается по мере увеличения масштаба в обратном каскаде. Кроме того, флуктуации скорости увеличиваются по мере увеличения масштаба в обратном каскаде. Вот почему в энергетическом балансе (9) второй член в правой части пренебрежимо мал, что объясняется условием $k_f L_\alpha \gg 1$. Другими словами, энергия диссипирует главным образом за счет трения о дно на масштабе L_α. И наоборот, энстрофия диссипирует главным образом за счет вязкости на малом масштабе L_ν. Следовательно, первый член в правой части уравнения (10) пренебрежимо мал, это объясняется условием $k_f L_\nu \ll 1$.

Сформулируем критерии применимости соотношений, приведенных в этом разделе. Мы установили, что турбулентные пульсации имеют масштабы между L_α и L_ν. Таким образом, для применимости картины неограниченной системы размер ячейки L должен быть намного больше максимального размера флуктуаций течения L_α (15), $L \gg L_\alpha$. При этом толщина пленки h должна быть намного меньше вязкой длины L_ν (16), $h \ll L_\nu$.

4. КОГЕРЕНТНЫЙ ВИХРЬ

Теперь мы обратимся к случаю больших значений L_α, $L_\alpha \gg L$. Это условие может быть достигнуто, скажем, за счет увеличения мощности силы ϵ, см. выражение (15). Кроме того, мы предполагаем, что размер ячейки L намного больше длины накачки, $k_f L \gg 1$. Тогда есть место для обратного каскада, передающего энергию от длины накачки k_f^{-1} на масштаб L. Однако обратный каскад существенно деформирован в случае $L_\alpha \gg L$ по сравнению с неограниченной системой.

Поскольку энергия, производимая силой накачки, не может поступать на масштабы, превышающих L, поток энергии там останавливается и энергия накапливается до тех пор, пока поступающий поток энергии не будет компенсирован трением о дно. Таким образом, мы приходим к оценке $v \sim \sqrt{\epsilon/\alpha}$ для флуктуаций скорости на масштабе L, следующей из баланса энергии (9). Величина $\sqrt{\epsilon/\alpha}$ много больше, чем колмогоровская оценка $(\epsilon L)^{1/3}$ (13), поскольку такая амплитуда скорости характерна для масштаба L_α для неограниченной системы, и $L_\alpha \gg L$.

Крупномасштабные флуктуации могут быть хаотичными, тогда мы имеем дело со случайным крупномасштабным движением [20]. Однако при некоторых условиях возникают когерентные вихри, представляющие собой долгоживущие структуры размером порядка размера ячейки L. Такие когерентные вихри наблюдались как в лабораторных экспериментах [16, 17], так и при численном моделировании [22, 24, 33]. Когерентный вихрь обладает хорошо определенным профилем средней скорости, определенным в системе отсчета, связанной с центром вихря. Обратим внимание на то, что центр вихря движется с некоторой случайной скоростью.

Основываясь на экспериментальных и численных результатах, можно утверждать, что вихрь в среднем изотропен. Другими словами, мы имеем дело с дифференциальным вращением, описываемым полярной скоростью $U(r)$, где r — расстояние между точкой наблюдения и центром вихря. Средняя завихренность когерентного вихря $\Omega = \partial_r U + U/r$ также является функцией расстояния r. Величина $\Omega(r)$ максимальна в центре когерентного вихря.

Уравнение для U может быть получено из базового уравнения (1), где необходимо разделить средний поток и флуктуации на его фоне. Ниже мы обозначаем как $\mathbf{v}$ скорость флуктуаций, в отличие от предыдущих разделов. Взяв полярную составляющую уравнения (1) и усреднив ее по времени, можно найти

$$\alpha U = -\left(\partial_r + \frac{2}{r}\right)\langle v_r v_\varphi\rangle + \\ + \nu\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\right)U, \quad (17)$$

где v_r и v_φ — радиальная и полярная составляющие флуктуаций скорости. При выводе уравнения (17) мы предположили, что средняя сила накачки равна нулю. Среднее значение $\langle v_r v_\varphi\rangle$ в уравнении (17) — это не что иное, как недиагональная составляющая тензора напряжений Рейнольдса [34].

Вязкий член в уравнении (17) существенен в области вблизи центра вихря, размер которой можно оценить как $\sqrt{\nu/\alpha}$. Внутри этой области, в ядре вихря, доминирует вязкий член, приводящий к твердотельному вращению $U \propto r$: такая зависимость обнуляет вязкий член в уравнении (17). Вне ядра вязкий член в уравнении (17) пренебрежимо мал. Тогда средний профиль U определяется балансом между трением о дно и силой, связанной с тензором напряжений Рейнольдса, генерируемым флуктуациями.

Разделяя в уравнении (1) среднее течение и флуктуации, можно получить следующее уравнение для флуктуирующей скорости

$$\begin{aligned}\partial_t v_\lambda + \lfloor(\mathbf{v}\cdot\nabla)v_\lambda\rfloor + \partial_\lambda p +\\ +\frac{U}{r}\partial_\varphi v_\lambda - \frac{U}{r}\varepsilon_{\lambda\mu}v_\mu - v_r\Sigma\frac{\varepsilon_{\lambda\mu}r_\mu}{r} =\\ = -\alpha v_\lambda + \nu\nabla^2 v_\lambda + f_\lambda,\end{aligned} \qquad (18)$$

где $\lfloor A\rfloor = A - \langle A\rangle$, $\varepsilon_{\lambda\mu}$ — двумерный антисимметричный символ Леви-Чивиты и

$$\Sigma = r\partial_r(U/r) = \partial_r U - U/r. \qquad (19)$$

Величина (19) является локальной скоростью сдвига среднего течения. Теперь давление p удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\nabla^2 p = -\partial_\lambda\partial_\mu\lfloor v_\mu v_\lambda\rfloor +\\ +\frac{2}{r}\left[U\varpi + \Sigma(v_\varphi - \partial_\varphi v_r)\right]\end{aligned} \qquad (20)$$

вместо уравнения (2). Здесь $\varpi = \operatorname{curl}\mathbf{v}$ — флуктуирующая составляющая завихренности.

Выведем аналог энергетического баланса (9) для внутренней части вихря. Умножая уравнение (18) на $\mathbf{v}$ и усредняя, получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\partial_r\left[r\langle v_r(p+v^2/2)\rangle\right] + \Sigma\langle v_r v_\varphi\rangle =\\ = \epsilon - \alpha\langle v^2\rangle + \nu\langle\mathbf{v}\cdot\nabla^2\mathbf{v}\rangle.\end{aligned} \qquad (21)$$

Отметим, что соотношение (21) корректно даже для неоднородного воздействия, поскольку из-за случайных движений вихря неоднородность эффективно усредняется. Поэтому в этом случае ϵ в уравнении (21) — это среднее значение по ячейке.

Уравнение для флуктуирующей составляющей завихренности ϖ внутри когерентного вихря имеет вид

$$\begin{aligned}\partial_t\varpi + \frac{U}{r}\partial_\varphi\varpi + v_r\partial_r\Omega + \lfloor(\mathbf{v}\cdot\nabla)\varpi\rfloor =\\ = -\alpha\varpi + \nu\nabla^2\varpi + \phi,\end{aligned} \qquad (22)$$

где $\Omega = \partial_r U + U/r$ — средняя завихренность и $\phi = \operatorname{curl}\mathbf{f}$, как и выше. Уравнение (22) может быть получено действием curl на (18) или напрямую из уравнения (4) разделением завихренности и скорости на среднюю и флуктуирующую компоненты.

Для расстояний r от центра вихря, значительно превышающих характерные длины флуктуаций, слагаемым, содержащим Ω в (22), можно пренебречь. Переходя в систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью $U(R)/R$, для расстояний r, близких к R, из (22) получим

$$\begin{aligned}\partial_t\varpi + \frac{\Sigma(R)}{R}(r-R)\partial_\varphi\varpi + \lfloor(\mathbf{v}\cdot\nabla)\varpi\rfloor =\\ = -\alpha\varpi + \nu\nabla^2\varpi + \phi.\end{aligned} \qquad (23)$$

Таким образом, влияние среднего течения на флуктуации сводится к их взаимодействию с эффективным сдвиговым потоком.

5. ФЛУКТУАЦИИ ВНУТРИ КОГЕРЕНТНОГО ВИХРЯ: КВАЗИЛИНЕЙНЫЙ РЕЖИМ

Среднее вихревое течение подавляет флуктуации внутри когерентного вихря. Это приводит к уменьшению нелинейного взаимодействия флуктуаций. Мы рассматриваем расстояния r, удовлетворяющие условию $k_f r \gg 1$. Тогда флуктуации можно рассматривать как живущие в сдвиговом потоке со скоростью сдвига (19). Как было продемонстрировано в работах [35–37], эффект подавления существенен, если

$$\Sigma \gg \nu k_f^2, \quad \Sigma^2 \gg \alpha^3/(\nu k_f^2). \qquad (24)$$

Условия (24) означают, что флуктуации размера k_f^{-1}, создаваемые силой накачки, существенно деформируются сдвиговым потоком, прежде чем они затухнут за счет диссипации (вязкости и трения о дно).

Анализ поправок к корреляционным функциям флуктуаций завихренности [35, 37] показывает, что параметром, определяющим силу взаимодействия флуктуаций, является

$$\beta = \frac{\epsilon}{\nu\Sigma^2} \qquad (25)$$

при условиях (24). Взаимодействие флуктуаций слабо при условии, что β мало. Обратим внимание на то, что коэффициент трения о дно α не входит в выражение для константы взаимодействия β (25), хотя α фигурирует в условиях (24). Параметр (25) может быть представлен как отношение величин $\epsilon/(\nu k_f^2)$ и $\Sigma^2 k_f^2$. В этом отношении числитель — не что иное, как квадрат типичной скорости, производимой накачкой при наличии вязкости, а знаменатель — квадрат разности скоростей на масштабе накачки, производимой сдвиговым течением с темпом сдвига Σ.

Если взаимодействие флуктуаций слабо, то можно пренебречь нелинейным членом в уравнении (23). В результате получится линейное уравнение для флуктуационной завихренности ϖ. В литературе такая ситуация называется квазилинейной. В квазилинейном приближении можно последовательно вычислять корреляционные функции ϖ, выражая ϖ через ϕ и проводя усреднение, используя заданную статистику накачки ϕ [26–29, 38]. Далее можно восстановить корреляционные функции поля скорости. Поправки к корреляционным функциям, возникающие за счет нелинейного взаимодействия флуктуаций, изучены в работах [36, 37].

Поскольку нелинейное взаимодействие флуктуаций не играет роли в квазилинейном режиме, прямой и обратный каскады внутри когерентного вихря отсутствуют. Масштаб флуктуаций течения, создаваемых силой накачки, может быть оценен как k_f^{-1} в радиальном направлении. Однако их характерный размер в угловом направлении намного больше, поскольку среднее течение растягивает флуктуации в угловом направлении. Степень растяжения зависит от времени жизни флуктуаций. Скажем, парная корреляционная функция завихренности формируется за время

$$\tau_\star = \left(\Sigma^2 \nu k_f^2\right)^{-1/3}. \tag{26}$$

Следовательно, характерный угловой размер флуктуаций равен

$$\Sigma \tau_\star k_f^{-1} = \left(\frac{\Sigma}{\nu k_f^2}\right)^{1/3} k_f^{-1}. \tag{27}$$

Этот размер намного больше радиального размера благодаря первому условию в (24).

Один из результатов вычислений в квазилинейном приближении касается корреляционной функции $\langle v_r v_\varphi \rangle$, фигурирующей в уравнении (17). Как было продемонстрировано в работах [26, 27],

$$\langle v_r v_\varphi \rangle = \epsilon / \Sigma. \tag{28}$$

Подставляя выражение (28) в уравнение (17), мы находим замкнутое уравнение для средней скорости U, поскольку Σ выражается через U в соответствии с уравнением (19). За пределами «вязкого» ядра, где членом с вязкостью в уравнении (17) можно пренебречь, мы находим решение уравнения

$$U = \sqrt{3\epsilon/\alpha}, \tag{29}$$

не зависящее от r. Плоский профиль скорости (29) наблюдался при численном моделировании [22], где соблюдался квазилинейный режим. Обратим внимание на то, что выражение (29) соответствует оценке $(\epsilon/\alpha)^{1/2}$ для крупномасштабных флуктуаций, найденных в разд. 4.

Вычисляя среднюю завихренность Ω, соответствующую плоскому профилю скорости (29), мы находим

$$\Omega = \sqrt{3\epsilon/\alpha}\, r^{-1}.$$

Таким образом, завихренность растет по мере уменьшения r и при малых r становится намного больше, чем типичная завихренность крупномасштабных флуктуаций. Можно сказать, что когерентные вихри аккумулируют завихренность. Закон $\Omega \propto r^{-1}$ работает вплоть до вязкого ядра, где Ω насыщается.

Соотношение (28) можно объяснить, основываясь на энергетическом балансе (21). Основной вклад в среднее $\langle v_r v_\varphi \rangle$ связан с флуктуациями радиальных масштабов порядка длины накачки. Поэтому ∇^2 в уравнении (20) оценивается, как k_f^2. Следовательно, давление p мало при условии $k_f r \gg 1$, и им можно пренебречь в уравнении (21). Членом, пропорциональным $v_r v^2$, в уравнении (21) также можно пренебречь, поскольку он имеет третий порядок по $\mathbf{v}$ и поэтому мал в квазилинейном режиме. Вне вязкого ядра можно пренебречь вязким членом в уравнении (21). Поскольку флуктуации слабы, можно пренебречь членом с α в уравнении (21). Таким образом, мы приходим к соотношению (28).

В соответствии с уравнением (19) темп сдвига, соответствующий скорости (29), равен

$$\Sigma = -\frac{\sqrt{3\epsilon/\alpha}}{r}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в уравнение (25), получаем

$$\beta = \frac{\alpha r^2}{3\nu}. \tag{31}$$

Условие малости такой величины β совместимо с неравенством $k_f r \gg 1$ только в том случае, если $\alpha \ll \nu k_f^2$. Неравенство не может быть достигнуто в тонких пленках жидкости (см. разд. 2), однако оно достижимо для свободно подвешенных мыльных или смектических пленок. Нет проблем с выполнением неравенства $\alpha \ll \nu k_f^2$ при численном моделировании. Неравенство было выполнено при численном моделировании, описанном в работе [22].

6. ФЛУКТУАЦИИ ВНУТРИ КОГЕРЕНТНОГО ВИХРЯ: СИЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Здесь мы рассмотрим случай, когда константа взаимодействия β (25) велика. Тогда нелинейное взаимодействие флуктуаций течения внутри когерентного вихря становится существенным. Обратим внимание на то, что в соответствии с выражением

(31) константа взаимодействия β растет по мере увеличения r. Поэтому можно столкнуться с ситуацией, когда оба режима (квазилинейный и режим сильного взаимодействия) сосуществуют внутри одного когерентного вихря.

Поскольку взаимодействие флуктуаций становится существенным для больших β, прямой и обратный каскады восстанавливаются, в отличие от квазилинейного режима. Однако корреляционные функции скорости и завихренности, характерные для этих каскадов, могут быть анизотропными в некоторой области масштабов. Это является прямым следствием растяжения флуктуаций потока в угловом направлении за счет среднего течения вихря.

Рассмотрим обратный каскад внутри вихря и распространим подход Колмогорова [31, 32] на этот случай. Как следует из уравнения (23), эффективное сдвиговое течение выпадает из рассмотрения при $r_1 = r_2 = r$. Таким образом, мы приходим к оценке для полярной скорости

$$v_\varphi(r,\varphi_1) - v_\varphi(r,\varphi_2) \sim (\epsilon r|\varphi_1-\varphi_2|)^{1/3}, \tag{32}$$

формально совпадающей с оценкой в изотропной ситуации (13).

Сравнивая сдвиговый параметр Σ с нелинейным темпом $r^{-1}\partial_\varphi v_\varphi$, мы находим, используя выражение (32), следующую длину

$$L_{an} = \epsilon^{1/2}\Sigma^{-3/2}, \tag{33}$$

разделяющую изотропный и анизотропный режимы. Для масштабов меньше, чем L_{an}, средний сдвиговый поток не играет роли и реализуется стандартный изотропный обратный каскад, тогда как для масштабов больше, чем L_{an}, становится существенным средний сдвиговый поток. Таким образом, для масштабов, превышающих L_{an}, обратный каскад становится анизотропным. Если $k_f L_{an} < 1$, то обратный каскад анизотропен на всех масштабах, превышающих длину накачки.

Установим характер этой анизотропии. С этой целью сравним в уравнении (23) слагаемое с Σ и нелинейный член. В результате мы найдем для структурной функции второго порядка соотношение вида

$$\langle [v_\varphi(r_1,\varphi_1) - v_\varphi(r_2,\varphi_2)]^2\rangle = [\epsilon r(\varphi_1-\varphi_2)]^{2/3} g(\xi), \tag{34}$$

где $r = r_1/2 + r_2/2$ и g — некоторая безразмерная функция автомодельной переменной ξ:

$$\xi = \Sigma(r_1-r_2)[\epsilon r(\varphi_1-\varphi_2)]^{-1/3}. \tag{35}$$

Аналогичным образом могут быть выражены структурные функции высших порядков для компоненты v_φ.

Условие несжимаемости $\nabla\mathbf{v} = 0$ приводит к выводу, что $\Delta r\Delta v_\varphi \sim r\Delta\varphi\Delta v_r$, где Δr, $\Delta\varphi$, Δv_r обозначают разности, фигурирующие в (34), (35). Заметим, что для значений автомодельной переменной $\xi \sim 1$ вариации компонент скорости удовлетворяют неравенству $\Delta v_r \ll \Delta v_\varphi$, поскольку $\Delta r \gg L_{an}$. Приведенные соображения позволяют установить соотношения подобия для произвольных корреляционных функций, содержащих вариации обеих компонент, v_φ и v_r.

Обратим внимание на то, что при $\xi \sim 1$

$$\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} \sim \left(\frac{L_{an}}{r\Delta\varphi}\right)^{2/3}. \tag{36}$$

Величина (36) мала для области анизотропного обратного каскада, где $r\Delta\varphi \gg L_{an}$. Другими словами, характерное расстояние в угловом направлении оказывается намного большим, чем в радиальном, как и ожидалось.

Анизотропный скейлинг (34) имеет место до тех пор, пока $|\varphi_1-\varphi_2| \ll 1$. Если эта разность становится порядка единицы, то условие $\xi \sim 1$ приводит к соотношению

$$\Delta r \sim r^{1/3} L_{an}^{2/3} \ll r. \tag{37}$$

Если Δr значительно превышает оценку (37), то слагаемое с Σ в уравнении (23) доминирует над нелинейным членом и мы приходим к квазилинейному режиму, в котором энергетический каскад отсутствует. Полученные ранее результаты, касающиеся этого режима [36, 37], см. также разд. 5, позволяют заключить, что (37) является корреляционной длиной флуктуаций в радиальном направлении. Таким образом, наибольшие значения флуктуаций скорости на расстоянии r от центра вихря могут быть оценены как

$$v_\varphi \sim (\epsilon r)^{1/3}, \quad v_r \sim \frac{L_{an}^{2/3}}{r^{2/3}}(\epsilon r)^{1/3} \tag{38}$$

в соответствии с (37) и (34).

Теперь мы возвращаемся к энергетическому балансу (21). Как следует из соотношения (20), первый вклад в давление p может быть оценен как $\mathbf{v}^2$, где $\mathbf{v}$ — наибольшее значение флуктуации скорости при данном r, определенное в (37). Второй вклад в p, описываемый последними двумя слагаемыми в правой части выражения (20), мал вследствие того, что лапласиан в этом случае оценивается как

$(\Delta r)^{-2}$, где Δr определено в (37). Большая величина лапласиана означает малость соответствующего вклада в давление p. Таким образом, в энергетическом балансе (21)

$$v_r\left(p+\frac{v^2}{2}\right)\sim\frac{L_{an}^{2/3}}{r^{2/3}}\epsilon r. \qquad (39)$$

Производная ∂_r в слагаемом с давлением в (21) может быть оценена как r^{-1}, так что это слагаемое содержит малый множитель $(L_{an}/r)^{2/3}$ при ϵ и, следовательно, рассматриваемым членом можно пренебречь.

Таким образом, мы приходим к тому же соотношению (28) и, следовательно, к тому же плоскому профилю скорости (29), что и в квазилинейном приближении. Профиль реализуется при условии наличия анизотропной области обратного каскада. Обратим внимание на то, что для плоского профиля скорости

$$L_{an}^2\sim r^3/L_\alpha^2\ll r. \qquad (40)$$

Следовательно, выражение (29) для средней скорости является самосогласованным.

Теперь несколько слов о прямом каскаде (каскаде энстрофии). Если $k_f L_{an}\gg 1$, то прямой каскад имеет такой же характер, как и в неограниченной системе, см. разд. 3. В противоположном случае, при $k_f L_{an}\ll 1$, прямой каскад анизотропен. Неравенство эквивалентно условию $\varSigma^3\gg\eta$. Как и для обратного каскада, корреляционные функции имеют свои характерные значения для $r\Delta\varphi\gg\Delta r$. В этой области $\varpi=-\partial_r v_\varphi$. Сравнивая затем слагаемое с $\varSigma$ и нелинейный член в уравнении (23), мы находим оценки

$$\varpi\sim\varSigma,\quad v_\varphi\sim\varSigma\Delta r. \qquad (41)$$

Как и в неограниченной системе, характерное значение ϖ не зависит от масштаба.

Распространяя аргументы Колмогорова и Крайчнана [6–8] на анизотропный прямой каскад, мы приходим к соотношению

$$\langle\Delta v_\varphi\varpi\varpi\rangle\sim\eta r\Delta\varphi \qquad (42)$$

для $\Delta r=0$. Подставляя (41) в (42), находим автомодельную переменную для прямого каскада,

$$(\varSigma^3\Delta r)/(\eta r\Delta\varphi), \qquad (43)$$

определяющую корреляционные функции в этой области масштабов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Двумерная турбулентность в некотором смысле более богата, чем трехмерная. Существуют два каскада (энергии и энстрофии), приводящие к образованию большого диапазона масштабов турбулентных пульсаций. Как следствие энергетического каскада, в ограниченной ячейке могут возникать когерентные вихри. Мы рассмотрели различные режимы флуктуаций потока в когерентном вихре, которые могут быть квазилинейными или нелинейными. В последнем случае следует ожидать анизотропный скейлинг.

Теоретические результаты, представленные в статье, в основном подтверждаются лабораторными экспериментами с тонкими пленками жидкости и численным моделированием. Однако теоретические результаты, касающиеся анизотропного скейлинга в нелинейном режиме, ожидают своего подтверждения. В настоящее время проводится численное моделирование для проверки наших предсказаний. Мы также думаем об экспериментальной проверке.

Мы рассмотрели простейшую модель, в которой и ячейка, в которой возбуждается турбулентность, и сила накачки однородны. Мы полагаем, что эта модель демонстрирует все качественные характеристики двумерной турбулентности. Однако можно расширить модель, включив в нее неоднородность ячейки и силы накачки. Результаты такой модели можно более детально сравнивать с гидродинамическими процессами в окружающей среде.

Следует отметить такое явление, как геострофические вихри, генерируемые в относительно быстро вращающейся жидкости и играющие существенную роль в геофизике [5]. Геострофические вихри могут быть описаны в терминах эффективного двумерного потока, управляемого двумерными уравнениями гидродинамики [39]. Было бы интересно расширить наши результаты, касающиеся анизотропного скейлинга, на геострофические вихри.

Другим возможным направлением расширения нашей теоретической схемы является переход к неньютоновским жидкостям. В частности, можно подумать о растворах полимеров. Эффекты, вызванные упругой степенью свободы, связанной с полимерами, могут привести к такому замечательному явлению, как эластическая турбулентность [40]. Было бы интересно изучить особенности эластической турбулентности в тонких пленках жидкости.

Благодарности. Мы благодарим В. М. Парфеньева за многочисленные полезные дискуссии.

Финансирование. Работа выполнена в лаборатории «Современная гидродинамика», созданной в рамках гранта 075-15-2022-1099 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН и поддержанной грантом 23-72-30006 Российского научного фонда.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Boffetta and R. E. Ecke, Ann. Rev. Fluid Mech. **44**, 427 (2012).

2. H. Kellay and W. I. Goldburg, *Two-Dimensional Turbulence: A Review of Some Recent Experiments*, Rep. Progr. Phys. **65**, 845 (2002).

3. S. V. Yablonskii, N. M. Kurbatov, and V. M. Parfenyev, Phys. Rev. E **95**, 012707 (2017).

4. J. Proudman, *On the Motion of Solids in a Liquid Possessing Vorticity*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **92**, 408 (1916).

5. J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer Science and Business Media (2013).

6. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967).

7. C. E. Leith, Phys. Fluids **11**, 671 (1968).

8. G. K. Batchelor, Phys. Fluids **12**, 233 (1969).

9. P. Tabeling, *Two-Dimensional Turbulence: A Physicist Approach*, Phys. Rep. **362**, 1 (2002).

10. G. Boffetta, A. Celani, and M. Vergassola, *Inverse Energy Cascade in Two-Dimensional Turbulence: Deviations From Gaussian Behavior*, Phys. Rev. E **61**, R29 (2000).

11. R. H. Kraichnan and D. Montgomery, Rep. Progr. Phys. **43**, 547 (1980).

12. U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).

13. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **47**, 525 (1971); **67**, 155 (1975).

14. G. Falkovich and V. Lebedev, Phys. Rev. E **49**, R1800 (1994); **50**, 3883 (1994).

15. J. Sommeria, J. Fluid Mech. **170**, 139 (1986).

16. H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, Phys. Fluids **21**, 125101 (2009).

17. А. В. Орлов, М. Ю. Бражников, А. А. Левченко, Письма в ЖЭТФ **107**, 166 (2018) [A. V. Orlov, M. Yu. Brazhnikov, and A. A. Levchenko, JETP Lett. **107**, 157 (2018)].

18. D. Molenaar, H. J. H. Clercx, G. J. F. van Heijst, Physica D **196**, 329 (2004).

19. P. K. Mishra, J. Herault, S. Fauve, and M. K. Verma, Phys. Rev. E **91**, 053005 (2015).

20. A. N. Doludenko, S. V. Fortova, I. V. Kolokolov, and V. V. Lebedev, *Coherent Vortex Versus Chaotic State in Two-Dimensional Turbulence,* Ann. Phys. **447**, 169072 (2022).

21. G. Boffetta, *Energy and Enstrophy Fluxes in the Double Cascade of Two-Dimensional Turbulence,* J. Fluid Mech. **589**, 253 (2007).

22. J. Laurie, G. Boffetta, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **113**, 254503 (2014).

23. A. Frishman, J. Laurie, and G. Falkovich, Phys. Rev. Fluids **2**, 032602 (2017).

24. V. Parfenyev, *Profile of a Two-Dimensional Vortex Condensate Beyond the Universal Limit*, Phys. Rev. E **106**, 025102 (2022).

25. Lichuan Xu, A. van Kan, Chang Lin, and E. Knobloch, *Fluctuation-Induced Transition in Anisotropic Two-Dimensional Turbulence*, arXiv: 2311.07863 [physics. flu-dyn] (2023).

26. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *Profile of Coherent Vortices in Two-Dimensional Turbulence*, Письма в ЖЭТФ **101**, 181 (2015) [JETP Lett. **101**, 164 (2015)].

27. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *Structure of Coherent Vortices Generated by the Inverse Cascade of Two-Dimensional Turbulence in a Finite Box*, Phys. Rev. E **93**, 033104 (2016).

28. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, J. Fluid Mech. **809**, R2 (2016).

29. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, *Крупномасштабное течение в двумерной турбулентности при статической накачке*, Письма в ЖЭТФ **106**, 633 (2017) [I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *Large-Scale Flow in Two-Dimensional Turbulence at Static Pumping*, JETP Lett. **106**, 659 (2017)].

30. V. M. Parfenyev and S. S. Vergeles, *Influence of Ekman Friction on the Velocity Profile of a Coherent Vortex in a Three-Dimensional Rotating Turbulent Flow*, Phys. Fluids **33**, 115128 (2021).

31. А. Н. Колмогоров, *Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса,* ДАН СССР **30**, 299 (1941), DOI: 10.3367/UFNr.0093.196711h.0476.

32. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Fluid Mechanics*, Vol. 6, Ch. III, Pergamon Press, New York (1987).

33. M. Chertkov, C. Connaughton, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **99**, 084501 (2007).

34. A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics, Mechanics of Turbulence*, Vol. 1, Ch. 3, Dover, New York (1971).

35. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, М. М. Тумакова, *Корреляции завихренности внутри когерентного вихря*, ЖЭТФ **163**, 881 (2023) [I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and M. M. Tumakova, *Correlations of Vorticity Inside a Coherent Vortex*, JETP **136**, 785 (2023)].

36. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, М. М. Тумакова, *Парная корреляционная функция завихренности внутри когерентного вихря*, Письма в ЖЭТФ **117**, 127 (2023) [I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and M. M. Tumakova, *Pair Correlation Function of Vorticity in a Coherent Vortex*, JETP Lett. **117**, 122 (2023)].

37. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, *Корреляции флуктуаций течения, возбуждаемых случайной силой на фоне сдвигового потока*, ЖЭТФ **165**, 128 (2024).

38. A. Frishman and C. Herbert, Phys. Rev. Lett. **120**, 204505 (2018).

39. I. V. Kolokolov, L. L. Ogorodnikov, and S. S. Vergeles, *Structure of Coherent Columnar Vortices in Three-Dimensional Rotating Turbulent Flow*, Phys. Rev. Fluids **5**, 034604 (2020).

40. V. Steinberg, *Elastic Turbulence: An Experimental View on Inertialess Random Flow*, Ann. Rev. Fluid Mech. **53**, 27 (2021).