

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ В РАМКАХ МАЛОМОДОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

О. О. Некрасов^{}, Н. Н. Картавых^{**}*

*Пермский государственный национальный исследовательский университет
614068, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 30 января 2023 г.,
после переработки 25 февраля 2024 г.
Принята к публикации 25 февраля 2024 г.

Исследуется плоский горизонтальный бесконечный слой вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости, помещенный в гравитационное и переменное электрическое поля, слой нагревается на верхней границе. Для решения задачи используется восьмимодовая модель электроконвекции (расширенная модель Лоренца). Задача решается численно. В результате анализа линейной устойчивости системы для различных периодов внешнего электрического поля получены критические волновое число и электрическое число Рэлея. В случае нелинейной эволюции системы получены бифуркационные диаграммы: зависимости безразмерного теплотока от амплитуды колебаний внешнего электрического поля. Найденны различные виды отклика системы на внешнее воздействие: периодические, квазипериодические и хаотические колебания, а также гистерезисные переходы между ними и состоянием равновесия. Получена карта режимов течения жидкости.

DOI: 10.31857/S0044451024060129

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время актуальной является задача об управлении теплотокотом в сплошных средах, например, жидкостях. Возможность контролировать тепломассоперенос в жидкостях может быть использована в различных технологических приложениях: при проектировании систем эффективного отвода тепла или для управления процессами в невосомости [1–3].

Очень хорошо изучена задача о термогравитационном механизме генерации конвекции, когда движение в неоднородно нагретой жидкости возникает за счет действия силы плавучести [4]. При этом жидкость может обладать рядом других физических свойств, например, являться носителем свободного заряда. В этом случае появляется дополнительный способ управления конвективным движением за счет воздействия на жидкость при помощи наложения внешнего электрического поля [5, 6]. Из-

вестно, что такое воздействие может привести к изменению порогов возникновения конвекции [6–9], к генерации колебательных [10] и хаотических [11] режимов движения.

В данной статье рассматривается случай взаимодействия двух механизмов возникновения конвекции: термогравитационного и электрокондуктивного [6, 9], связанного с неоднородным распределением электропроводности.

Существует множество подходов к изучению динамики нелинейных систем, большая часть которых сводится к применению численных методов. Основная сложность связана с отсутствием аналитических решений общего вида системы уравнений Навье–Стокса, описывающей поведение вязкой жидкости.

В середине XX века Э. Лоренц продемонстрировал новый способ численного моделирования уравнений Навье–Стокса, основанный на исследовании амплитуд разложения полей системы по малому набору базисных функций [12]. В этой модели конвекции в качестве фазовых переменных выступают зависящие от времени амплитуды пространственных базисных тригонометрических функций (моды), од-

^{*} E-mail: dakeln2@gmail.com

^{**} E-mail: kartavykh@psu.ru

на для поля скорости и две для температуры.

Такой подход позволил обнаружить новые важные закономерности в поведении динамических систем и привел к созданию нового раздела физики — теории динамического хаоса [13]. Несмотря на интенсивное применение численных моделей и коммерческих вычислительных пакетов, маломодовые системы по-прежнему используются для анализа нелинейной эволюции течений в различных жидкостях [14–17], в том числе начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода [14]. Использование маломодовых моделей для теоретического описания конвекции в переменных полях показывает хорошее соответствие с экспериментами даже для больших надкритичностей [18, 19].

В данной работе для анализа электротермоконвективных течений используется модифицированная модель Лоренца, основанная на разложении полей гидродинамической системы на восемь базисных функций, отражающих симметрию задачи [10, 20]. В рамках предложенной модели изучены случаи мгновенной и конечной во времени релаксации заряда при нагреве слабопроводящей жидкости снизу в постоянном электрическом поле [20], в изотермическом случае и при сильном нагреве сверху в переменном электрическом поле [9]. В данной работе представлены результаты исследования эволюции течений слабопроводящей жидкости, возникающих в переменном электрическом поле при умеренном нагреве сверху. При этом обнаружены и проанализированы новые последовательности переходов между регулярными и хаотическими колебательными течениями.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоский бесконечный горизонтальный слой вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости толщиной h , помещенный между обкладками плоского бесконечного горизонтального конденсатора. На жидкость действует переменное электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E}$, поле силы тяжести $\mathbf{g}$, также обкладки конденсатора нагреты до разности температур Θ . Обкладки конденсатора идеально тепло- и электропроводящие, физические условия на них выражаются при помощи следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0: \quad \hat{T} &= \Theta, \quad \Phi = \hat{U} \cos(\omega t), \\ \text{при } z = h: \quad \hat{T} &= 0, \quad \Phi = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где z — вертикальная координата, ω — частота внешнего электрического поля, $\hat{U}$ — амплитуда изменения электрического потенциала Φ .

Под слабопроводящей понимается жидкость, имеющая электропроводность $\sigma \sim 10^{-9} - 10^{-11} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, что позволяет использовать электрогидродинамическое приближение: в силу малости токов можно пренебречь магнитными эффектами и джоулевым нагревом [6, 7].

Система дифференциальных уравнений, описывающих систему, включает в себя уравнение Навье – Стокса, уравнение теплопроводности, закон сохранения заряда, закон Гаусса, связь между напряженностью электрического поля и его потенциалом, уравнение неразрывности [21]:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{v} + q \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \hat{T} &= \chi \Delta \hat{T}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(\sigma \mathbf{E}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) q &= 0, \\ \text{div } \mathbf{E} &= q / \varepsilon \varepsilon_0, \\ \mathbf{E} &= -\nabla \Phi, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{v}$, p , $\hat{T}$ — поля скорости, давления и температуры соответственно, η — динамическая вязкость жидкости, ρ — плотность жидкости, χ — коэффициент температуропроводности, q — объемная плотность заряда, σ — электропроводность жидкости, ε — диэлектрическая проницаемость, ε_0 — электрическая постоянная.

Рассматриваются линейные зависимости плотности и электропроводности жидкости от температуры:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_\theta \hat{T}), \quad \sigma = \sigma_0(1 + \beta_\sigma \hat{T}),$$

см. [6, 21], где ρ_0 и σ_0 — значения плотности и электропроводности при средней температуре, β_θ и β_σ — положительные коэффициенты. Таким образом, термогравитационный и электрокондуктивный механизмы возникновения конвекции являются основными [9]. В силу малости неоднородности электропроводности (для слабопроводящей жидкости при умеренном нагреве $\beta_\sigma \hat{T} \ll 1$) можно пренебречь пространственной неоднородностью электрического поля и изменением поля, вызываемым перераспределением зарядов, т.е. использовать безындукционное приближение [20].

Система (2) приводится к безразмерному виду согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} [t] &= \frac{\rho_0 h^2}{\eta}, \quad [\Phi] = \hat{U}, \quad [\mathbf{v}] = \frac{\chi}{\eta}, \quad [r] = h, \\ [\hat{T}] &= \Theta, \quad E = \frac{\hat{U}}{h}, \quad [p] = \frac{\eta \chi}{h^2}, \quad [q] = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \hat{U}}{h^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

и с учетом приближения Буссинеска [4] ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \\ = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{Ra} \hat{T} \mathbf{j} + \text{Ra}_\sigma q \cos(\omega t) \mathbf{j}, \\ \text{Pr} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \hat{T} &= \Delta \hat{T}, \\ \text{Pr}_e \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(\sigma \mathbf{E}) + \frac{\text{Pr}_e}{\text{Pr}} (\mathbf{v} \cdot \nabla) q &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{j}$ — единичный вектор, сонаправленный с вертикальной осью z . Система (4) содержит следующие безразмерные параметры:

$$\text{Ra} = \frac{\rho_0 g \beta_\theta \Theta h^3}{\chi \eta}$$

— число Рэлея, характеризующее интенсивность нагрева жидкости,

$$\text{Ra}_\sigma = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \hat{U}^2 \beta_\sigma \Theta}{\chi \eta}$$

— электрический аналог числа Рэлея, связанный с амплитудой внешнего электрического поля,

$$\text{Pr} = \frac{\eta}{\chi \rho_0}$$

— число Прандтля, отражающее соотношение между вязким и теплопроводным переносом энергии в жидкости,

$$\text{Pr}_e = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \eta}{h^2 \sigma_0 \rho_0}$$

— электрический аналог числа Прандтля, характеризующий соотношение между вязкими и электрическими силами.

3. МАЛОМОДОВАЯ МОДЕЛЬ

Представим поля $\mathbf{v}$, $\hat{T}$ и q в виде $\mathbf{v}$, $\hat{T} = \hat{T}_0 + \theta$ и $q = q_0 + q'$, где $\mathbf{v}$, θ и q' — отклонения величин от

их равновесных значений (далее штрихи будут опущены). Учитывая отсутствие горизонтальной анизотропии, можно рассматривать лишь двумерные возмущения в вертикальной плоскости $x - z$, в реальности возникающие на пороге конвективной устойчивости. Введем функцию тока ψ , такую что

$$v_x = -\partial \psi / \partial z, \quad v_z = \partial \psi / \partial x,$$

см. [9], тогда система уравнений (4) перепишется в виде [20]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi \right) &= \Delta^2 \psi + \\ + \text{Ra} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \text{Ra}_\sigma \frac{\partial q}{\partial x} \cos(\omega t), \\ \text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \Delta \theta + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \text{Pr}_e \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\text{Pr}_e}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \\ + q + \frac{\partial \theta}{\partial z} \cos \omega t &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0: \quad \psi = \psi'' = \theta = 0, \\ \text{при } z = h: \quad \psi = \psi'' = \theta = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для поиска решений системы уравнений (5), удовлетворяющих граничным условиям (6), применяется метод Галеркина [4] с аппроксимацией полей ψ , θ и q по минимальному набору базисных функций [9]:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k} \times \\ &\times (X(t) \sin \pi z + V(t) \sin 2\pi z) \sin \pi k x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} (Y(t) \sin \pi z + W(t) \sin 2\pi z) \cos \pi k x + \\ &+ \frac{1}{\pi} Z(t) \sin 2\pi z, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} q &= (\sqrt{2}S(t) \cos \pi z + 2\sqrt{2}T(t) \cos 2\pi z) \cos \pi k x + \\ &+ U(t) \cos 2\pi z. \end{aligned}$$

Здесь k — волновое число, характеризующее периодичность решений по горизонтали, а коэффициенты X , V , Y , W , Z , S , T , U — амплитуды, показывающие вклад пространственных мод в решение.

Разложения (7) содержат слагаемые разной четности по z , что связано с наличием в системе (5) производных разного порядка по z . Амплитуды $X - U$ определяются при помощи условий, выражающих ортогональность невязки уравнений системы (5) по отношению к каждой из базисных функций [4]. После перемасштабирования времени

$$t \rightarrow \frac{\text{Pr}}{\pi^2(1+k^2)}t$$

получим систему восьми обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд пространственных гармоник (точка над переменной обозначает производную по времени) [9, 22]:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \text{Pr}(-X + rY - eT \cos \omega t), \\ \dot{Y} &= -Y + X + XZ, \\ \dot{Z} &= -bZ - XY, \\ \dot{V} &= \text{Pr}(-dV + (rW + eS \cos \omega t)/d), \\ \dot{W} &= -dW + V, \\ \dot{S} &= -gS + XU - gY \cos \omega t, \\ \dot{T} &= -gT - gW \cos \omega t, \\ \dot{U} &= -gU - XS - 2gZ \cos \omega t.\end{aligned}\quad (8)$$

В системе (8) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}r &= \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_0}, \quad e = \frac{\text{Ra}_\sigma}{\text{Ra}_{\sigma 0}}, \\ \text{Ra}_0 &= \frac{\pi^4(1+k^2)^3}{k^2}, \quad \text{Ra}_{\sigma 0} = \frac{3\pi^4(1+k^2)^3}{8k^2}, \\ d &= \frac{4+k^2}{1+k^2}, \quad b = \frac{4}{1+k^2}, \quad g = \frac{\text{Pr}}{\pi^2(1+k^2)\text{Pr}_e},\end{aligned}\quad (9)$$

где r , e — нормированные тепловое и электрическое числа Рэлея, Ra_0 — критическое число Рэлея, при котором начинается термогравитационная конвекция, $\text{Ra}_{\sigma 0}$ — параметр системы.

4. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Изучается случай умеренного нагрева сверху, при котором нормированное тепловое число Рэлея r принимает отрицательное значение -1 [23]. Как видно из соотношений (9), при нагреве сверху нормированное электрическое число Рэлея e также отрицательно, но в работе рассматривалось его абсолютное значение. Прочие параметры жидкости имеют значения $\text{Pr} = 400$, $\text{Pr}_e = 30$. Они соответствуют слабопроводящим жидкостям, электропроводность

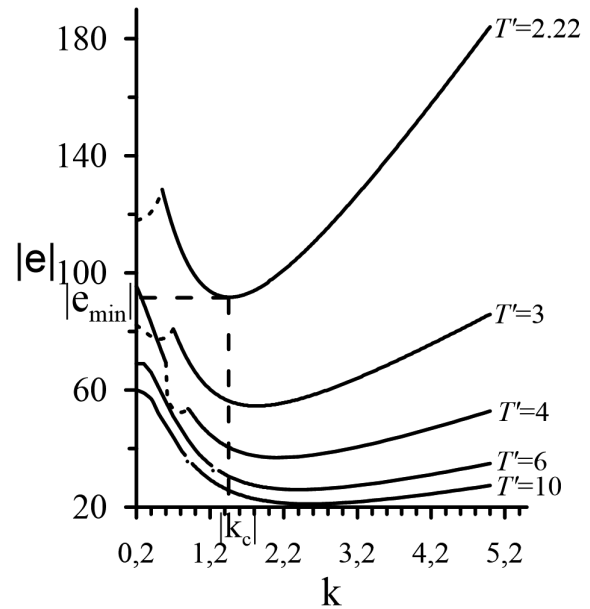


Рис. 1. Семейство нейтральных кривых в координатах волновое число k — модуль электрического параметра $|e|$ при различных периодах T' изменения внешнего электрического поля. Сплошные линии отвечают квазипериодическим режимам, пунктирные — синхронным [23]

которых зависит от температуры, например, кукурузному или трансформаторному маслу [24–26]. Реальные физические характеристики системы отвечают толщине слоя 1 см, разности потенциалов 1 кВ, разности температур $\sim 10^\circ\text{C}$.

Как видно из системы (8) с набором безразмерных параметров (9), волновое число k , соответствующее пространственному горизонтальному масштабу возмущений, остается неопределенным. Стандартным подходом для нахождения значения этого параметра является анализ линейных возмущений системы.

После линеаризации система (8) может быть представлена в матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$$

с линейной матрицей, зависящей от времени с периодом $T' = 2\pi/\omega$. Тогда для анализа ее линейной устойчивости можно применить теорию Флоке [27], с помощью которой получены нейтральные кривые линейной устойчивости системы для различных периодов внешнего электрического поля (рис. 1) [23].

Определив точку экстремума нейтральной кривой, можно вычислить минимальное по модулю значение безразмерного электрического параметра, с которого начинается конвективное движение жидкости, а также соответствующее критическое вол-

новое число, например, $|e_{min}|(T' = 2.22) = 91.7$ и $k_c(T' = 2.22) = 1.45$. Линейный анализ устойчивости системы предсказывает возникновение квазипериодических колебаний в областях глобального минимума нейтральных кривых рис. 1. В областях локальных минимумов кривых колебания синхронны, соответствующие области построены пунктирными линиями.

5. РЕЖИМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ КОНВЕКЦИИ

Чтобы описать интенсивность конвективных процессов, вычислялось число Нуссельта (Nu) — параметр, равный среднему по времени теплотопотку, приходящемуся на единицу горизонтальной границы конденсатора [9]. Число Нуссельта может быть выражено через амплитуду Z системы (8):

$$Nu = 1 - \frac{2}{t_{end}} \int_0^{t_{end}} Z(t) dt, \quad (10)$$

где t_{end} выбирается таким образом, чтобы в него укладывалось более сотни периодов колебаний системы.

Волновые числа k брались из результатов применения линейной теории ($k = k_c$, где k_c отвечает глобальному минимуму нейтральной кривой для выбранного периода внешнего поля). Геометрические параметры b , g и d определялись исходя из выбранного волнового числа. Значения прочих безразмерных параметров приведены в начале разд. 4.

Исследование режимов электроконвекции проводилось следующим образом: система (8) численно интегрировалась при помощи метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности при различных значениях безразмерного нормированного электрического числа Рэлея $|e|$ и периода изменения электрического поля T' . Использовался метод продолжения по параметру: при вычислении числа Нуссельта для каждого значения $|e|$ в качестве начальных условий использовались распределения, полученные на предыдущем шаге по $|e|$. Этот метод позволяет непрерывно изменять управляющий параметр, определяя границы гистерезисных переходов [28]. Таким образом определялись зависимости $Nu(|e|)$ для различных периодов внешнего электрического поля T' , для каждого периода бралось соответствующее критическое значение волнового числа.

В ходе исследования были выделены несколько видов эволюции системы для различных периодов внешнего поля T' .

5.1. Период внешнего поля $T' = 2$

Зависимость безразмерного теплотопотока Nu от параметра $|e|$ для данного периода внешнего поля представлена на рис. 2.

При увеличении параметра $|e|$ из начальных условий, соответствующих малым возмущениям механического равновесия, конвекция возникает в виде квазипериодических колебаний в точке А рис. 2 ($|e| = 112.2$) (фурье-спектр колебаний амплитуды X содержит две или более частоты, несоизмеримых с внешней ($\nu = 0.5$, рис. 3 а)).

При дальнейшем росте параметра $|e|$ квазипериодические колебания переходят в точке В рис. 2 ($|e| = 122.7$) в специфический субгармонический режим колебаний: фурье-спектр содержит внешнюю частоту, а также частоту, вдвое меньшую внешней, и их линейные комбинации (рис. 4).

На участке ВС происходит каскад бифуркаций удвоений периодов (рис. 4), переходящий в хаос в точке С рис. 2 ($|e| = 124.7$). Хаотические колебания существуют на участке CD рис. 2 и характеризуются непрерывным фурье-спектром (рис. 3 б). В точке D рис. 2 ($|e| = 126.6$) вновь возникает режим, характеризующийся частотой, вдвое меньшей частоты внешнего поля. При дальнейшем увеличении

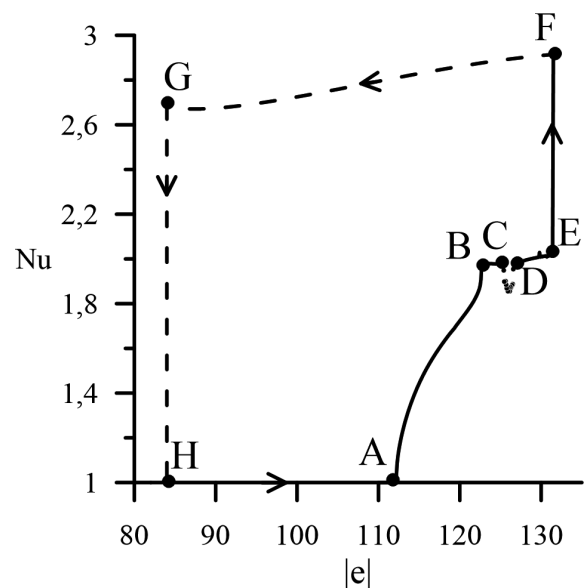


Рис. 2. Зависимость числа Нуссельта Nu от абсолютного значения безразмерного электрического параметра $|e|$ при периоде внешнего поля $T' = 2$. Сплошная линия — движение в сторону увеличения $|e|$, штриховая — в сторону уменьшения $|e|$

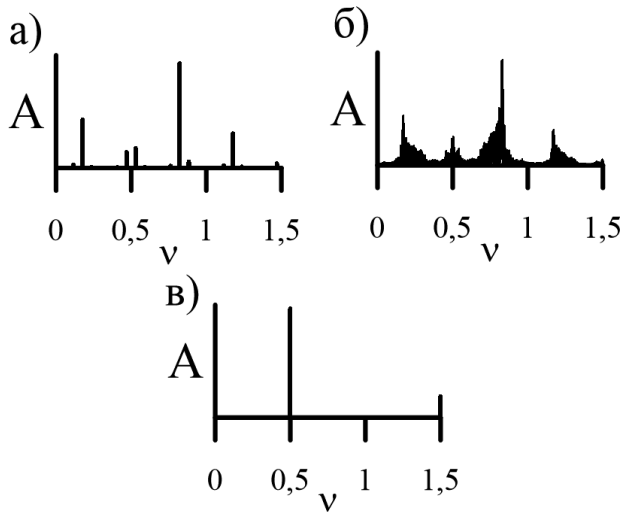


Рис. 3. Фурье-спектры колебаний амплитуды X при периоде воздействия $T' = 2$ для различных значений $|e|$. Нижняя ветвь рис. 2: а — $|e| = 120$, квазипериодический отклик; б — $|e| = 126$, хаотические колебания. Верхняя ветвь рис. 2: в — $|e| = 131$, синхронный отклик

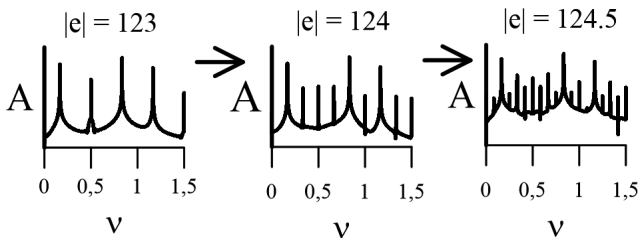


Рис. 4. Фурье-спектры колебаний амплитуды X в логарифмическом масштабе при периоде воздействия $T' = 2$. Колебания отвечают участку BC рис. 2, где происходит субгармонический каскад

$|e|$ система колеблется таким образом до точки E рис. 2 ($|e| = 131.3$), где теплопоток резко возрастает. При числах Нуссельта, больших 2.5, в слое появляются синхронные возмущения, фурье-спектры которых содержат лишь те частоты, что кратны внешней (рис. 3 в).

Если, пользуясь методом продолжения по параметру, последовательно уменьшать параметр $|e|$ из значений, лежащих правее точки F рис. 2, то переход системы от конвективного течения к механическому равновесию будет происходить иным образом, с резким уменьшением числа Нуссельта в точке G рис. 2 ($|e| = 84$). Таким образом, в системе реализуется гистерезис (петля HAFG на рис. 2), сопровождающийся скачками теплопотока.

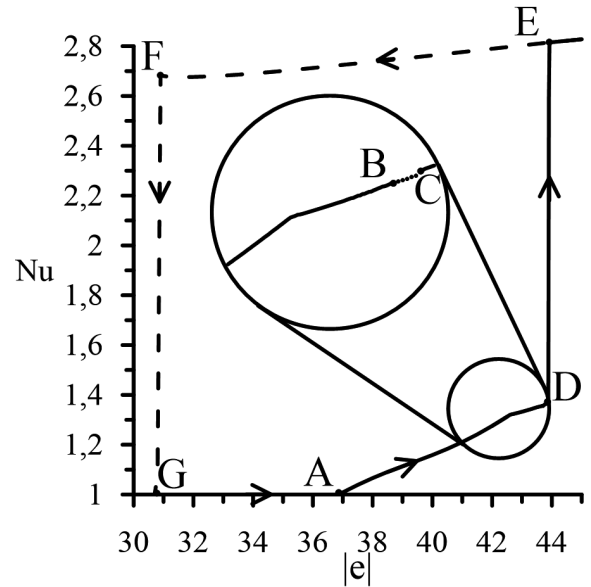


Рис. 5. Зависимость числа Нуссельта Nu от абсолютного значения безразмерного электрического параметра $|e|$ при периоде внешнего поля $T' = 4$. Сплошная линия — движение в сторону увеличения $|e|$, штриховая — в сторону уменьшения $|e|$

5.2. Период внешнего поля $T' = 4$

Зависимость безразмерного теплопотока от параметра $|e|$ для данного периода внешнего поля представлена на рис. 5.

При увеличении абсолютного значения параметра e конвекция возникает в точке A рис. 5 ($|e| = 36.9$) в виде квазипериодических колебаний. При дальнейшем увеличении $|e|$ эти колебания переходят в хаос через квазипериодичность в точке B рис. 5 ($|e| = 43.5$). Переход к хаосу через квазипериодичность сопровождается появлением в системе все большего количества линейных комбинаций частот, несоизмеримых с внешней, до тех пор, пока спектр не становится непрерывным. Хаос существует на участке BC рис. 5 (в точке C $|e| = 43.78$). На участке CD рис. 5 реализуется область синхронизации, в которой наблюдаются субгармонические колебания. Затем, в точке D рис. 5 ($|e| = 43.9$) теплопоток испытывает резкий скачок, и система переходит к синхронным колебаниям.

Аналогично предыдущему случаю наблюдается явление гистерезиса (петля ADEFG на рис. 5): одновременное сосуществование режимов с разными числами Нуссельта. При $Nu > 2.6$ реализуются синхронные колебания (участок EF на рис. 5). При уменьшении параметра $|e|$ в точке F рис. 5 ($|e| = 30.9$) система переходит к состоянию равновесия.

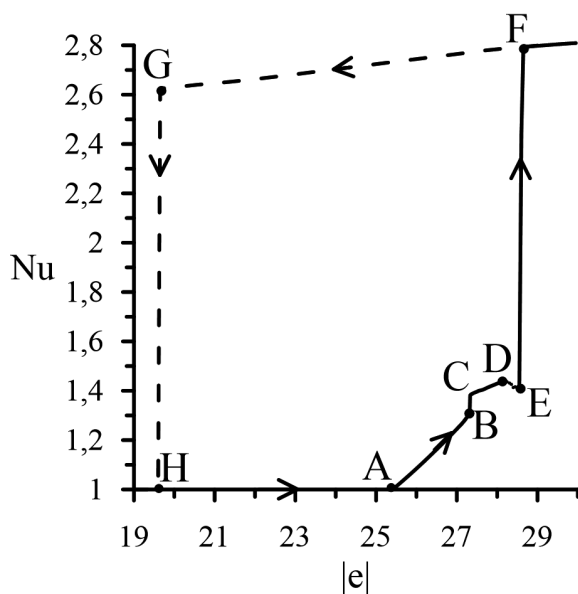


Рис. 6. Зависимость числа Нуссельта Nu от абсолютного значения безразмерного электрического параметра $|e|$ при периоде внешнего поля $T' = 6.2$. Сплошная линия — движение в сторону увеличения $|e|$, штриховая — в сторону уменьшения $|e|$

5.3. Период внешнего поля $T' = 6.2$

Зависимость безразмерного теплопотока от параметра $|e|$ для данного периода внешнего поля представлена на рис. 6.

Подобно всем предыдущим случаям, конвекция возникает в виде квазипериодических колебаний в точке А рис. 6 ($|e| = 25.4$). При увеличении параметра $|e|$ в точке В рис. 6 ($|e| = 27.3$) происходит обратная бифуркация (число Нуссельта резко возрастает для определенного значения $|e|$), и система переходит в точку С рис. 6 к колебаниям, характеризующимся частотой, втрое меньшей частоты внешнего поля. Затем происходит каскад удвоений периода, приводящий к появлению хаоса в точке D рис. 6 ($|e| = 28.2$), который существует вплоть до точки Е рис. 6 ($|e| = 28.6$), где система с резким увеличением числа Нуссельта переходит к синхронным колебаниям.

При этом периоде внешнего поля также наблюдается явление гистерезиса (петля AEFGBH на рис. 6). На верхней ветви этой петли FG рис. 6 реализуются синхронные колебания, при уменьшении параметра $|e|$ в точке G рис. 6 ($|e| = 19.6$) в системе резко исчезает конвекция.

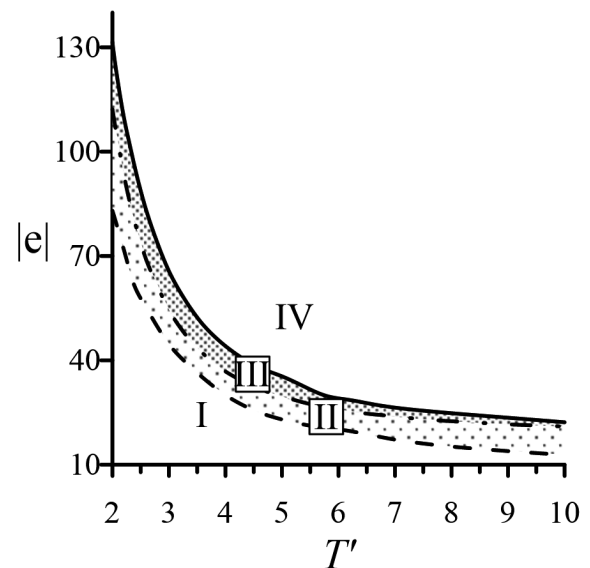


Рис. 7. Карта режимов движения жидкости на плоскости период изменения внешнего электрического поля T' — абсолютное значение электрического параметра $|e|$. I — область отсутствия конвекции; II — область сосуществования синхронных колебаний и отсутствия конвекции; III — область сосуществования синхронных колебаний и различных режимов: квазипериодических колебаний, субгармонических колебаний и хаоса; IV — область синхронных колебаний

На основании исследования зависимостей числа Нуссельта от безразмерного электрического параметра для различных периодов изменения внешнего электрического поля была построена карта режимов электроконвекции для диапазона периодов $[2; 10]$ (рис. 7).

Для всех рассмотренных периодов изменения внешнего поля неустойчивость возникает при увеличении управляющего параметра $|e|$ из состояния равновесия через квазипериодические колебания (штрихпунктирная линия на рис. 7). При дальнейшем увеличении электрического числа Рэлея малоинтенсивные квазипериодические колебания могут трансформироваться в субгармонические или хаотические режимы. С ростом электроконвективного параметра на границе, отмеченной сплошной линией на рис. 7, возникают высокоинтенсивные синхронные колебательные течения. При уменьшении управляющего параметра из областей интенсивной конвекции на границе, отмеченной штриховой линией на рис. 7, происходит переход к механическому равновесию жидкости.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача об электроконвекции плоского горизонтального слоя вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости, помещенного в переменное электрическое поле и нагреваемого сверху, изучена в рамках маломодового приближения. Рассматривается случай умеренного нагрева сверху.

В результате исследования линейных возмущений при переменном внешнем воздействии получены нейтральные кривые, зависящие от периода электрического поля, определены соответствующие критические волновые числа.

В нелинейном случае изучена эволюция системы при изменении амплитуды и периода внешнего электрического поля. Обнаружены различные виды отклика системы: квазипериодический, субгармонический, характеризующийся частотой, вдвое меньшей частоты внешнего воздействия, синхронный и хаос. Выявлены различные сценарии перехода к хаосу, через квазипериодичность и через субгармонический каскад.

Обнаружено явление гистерезиса. В зависимости от начальных условий колебательные течения слабопроводящей жидкости могут иметь высокую или низкую интенсивность. Высокоинтенсивный режим отвечает синхронным возмущениям. Для колебаний низкой интенсивности наблюдаются различные режимы отклика системы. Гистерезисные переходы сопровождаются бифуркациями. Предсказания линейной теории подтверждаются в нелинейном случае.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-21-00344, <https://rscf.ru/project/23-21-00344/>).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Авдеевский, И. В. Бармин, С. Д. Гришин и др., *Проблемы космического производства*, Машиностроение, Москва (1980).
2. В. И. Полежаев, А. В. Бунэ, Н. А. Вerezуб и др., *Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса*, Наука, Москва (1987).
3. А. В. Гетлинг, *Конвекция Рэлея – Бенара: Структуры и динамика*, Эдиториал УРСС, Москва (1999).
4. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
5. Г. А. Остроумов, *Взаимодействие электрических и гидродинамических полей: физические основы электрогидродинамики*, Наука, Москва (1979).
6. М. К. Болога, Ф. П. Гросу, И. А. Кожухарь, *Электроконвекция и теплообмен*, Штиинца, Кишинева (1977).
7. B. L. Smorodin and M. G. Verlade, *J. Electrostatics* **48**, 261 (2000).
8. В. А. Ильин, Б. Л. Смородин, *Письма в ЖТФ* **31**, 57 (2005).
9. Н. Н. Картавых, Б. Л. Смородин, В. А. Ильин, *ЖЭТФ* **148**, 178 (2015).
10. В. А. Ильин, Б. Л. Смородин, *Письма в ЖТФ* **33**, 81 (2007).
11. Б. Л. Смородин, А. В. Тараут, *ЖЭТФ* **145**, 180 (2014).
12. E. N. Lorenz, *J. Atmosph. Sci.* **20**, 130 (1963).
13. П. Берже, И. Помо, К. Видаль, *О детерминированном подходе к турбулентности*, Мир, Москва (1991).
14. Н. Б. Волков, Н. М. Зубарев, *ЖЭТФ* **107**, 1868 (1995).
15. J. Jawdat, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* **37**, 629 (2010).
16. D. Laroze, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* **18**, 2436 (2013).
17. A. Srivastava and B. Bhadauria, *J. Nanofluids* **12**, 904 (2023).
18. R. Finucane and R. Kelly, *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 71 (1976).
19. G. Ahlers, P. C. Hohenberg, and M. Luke, *Phys. Rev. A* **32**, 3519 (1985).
20. В. А. Ильин, *ЖТФ* **83**, 64 (2013).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. VI, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
22. B. Smorodin and N. Kartavykh, *Micrograv. Sci. Technol.* **32**, 423 (2020).

23. O. O. Nekrasov and N. N. Kartavykh, *Interfacial Phenomena and Heat Transfer* **7**, 217 (2019). *Electrophysics and Electrohydrodynamics of Liquids» (MPEEL)*, 79 (2000).
24. С. Р. Косвинцев, Вестник Пермского университета, сер. Физика **2**, 128 (1994).
25. С. А. Жданов, С. Р. Косвинцев, И. Ю. Макарихин, ЖЭТФ **117**, 398 (2000).
26. S. R. Kosvintsev, B. L. Smorodin, S. A. Zhdanov et al., *Proc. Int. Conf. «Modern Problems of*
27. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во иностр. лит., Москва (1958).
28. Е. Л. Тарунин, *Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции*, Изд-во Иркут. унив., Иркутск (1990).