

ЭВОЛЮЦИЯ СВОЙСТВ ОПЕРАТОРОВ ФАЗЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МОДЕЛЯХ РАБИ И ДЖЕЙНСА – КАММИНГСА

*А. В. Козловский**

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119234, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 ноября 2023 г.,
после переработки 21 декабря 2023 г.
Принята к публикации 26 декабря 2023 г.

Исследована эволюция во времени средних значений и дисперсий тригонометрических функций оператора фазы квантового электромагнитного поля, взаимодействующего с двухуровневым атомом. Рассмотрено поле с малым числом фотонов для различных начальных квантовых состояний поля и атома в рамках теории эрмитова оператора фазы Пегга – Барнетта. Исследовано различие эволюции операторов фазы, следующей из теории Джейнса – Каммингса и модели Раби в условиях ультрасильной связи атома с полем. Показано качественное отличие результатов приближенной модели Джейнса – Каммингса от результатов модели Раби в случае ультрасильной связи атома с полем для микроскопических полей с числом фотонов $\langle n \rangle \sim 1$ для фоковских и когерентных начальных квантовых состояний поля и любых начальных состояний атома. Показано, что в случае когерентного начального состояния поля с большими $\langle n \rangle > 10$ в условиях ультрасильной связи для эволюции средних и дисперсий операторов фазы поля характерен ярко выраженный квантовый эффект коллапса и возрождения средних и дисперсий этих величин.

DOI: 10.31857/S004445102405002X

1. ВВЕДЕНИЕ

Основным фундаментальным физическим процессом, исследуемым в области квантовой оптики, является динамика взаимодействия атома/молекулы с квантовомеханическим электромагнитным полем. При исследованиях таких процессов важными изучаемыми (рассчитываемыми или измеряемыми) физическими величинами являются средние квантовомеханические значения населенностей квантовых состояний атома (уровней энергии) и их флуктуации (дисперсии), а также средние значения и флуктуации разностей населенностей рассматриваемых состояний атома или молекулы. Другими фундаментальными величинами, характеризующими систему атомов и электромагнитных полей, являются средние значения амплитуды поля и их квантовые флуктуации. Величина комплекснозначной амплитуды поля (средние квантовомеханические значения неэрмитовых операторов

рождения/уничтожения электромагнитного поля) описывается в квантовой теории света с помощью эрмитовых операторов числа фотонов, а также с помощью эрмитовых операторов фазы тригонометрических функций операторов фазы (ТФОФ) электромагнитного поля, обладающих действительными средними значениями и являющихся, таким образом, непосредственно измеряемыми наблюдаемыми величинами.

Эволюция (изменение во времени) квантовомеханического вектора состояния системы атом + поле $|\Psi(t)\rangle$ может быть найдена для любого начального состояния системы $|\Psi(t=0)\rangle$ путем решения уравнения Шредингера в модели Раби. Модель Раби в дипольном приближении для двухуровневого атома учитывает как реальные переходы атома с излучением или поглощением фотонов поля, так и виртуальные процессы, означающие излучение фотона, сопровождающееся возбуждением атома, а также поглощение фотона, сопровождаемое переходом атома в нижнее энергетическое состояние [1–4]. Широко используемой приближенной теорией, основанной на модели Раби (МР), является модель Джейнса – Каммингса (МДК), в рам-

* E-mail: kozlovskiyav@lebedev.ru

ках которой в гамильтониане взаимодействия атома с полем пренебрегается членами, ответственными за виртуальные процессы. Модель Джейнса – Каммингса (приближение вращающейся волны (RWA)) положена в основу квантовой теории лазера. Как показали расчеты [5–17], применимость МДК ограничивается случаем малости величины константы взаимодействия атома с полем по сравнению с частотой поля. Предсказания МДК и МР для средних и дисперсий числа фотонов и населенностей атомных уровней совпадают между собой лишь в случае, когда абсолютная величина константы взаимодействия $|g| < 10^{-2}\omega_f$, где ω_f — частота поля.

В настоящее время в ряде экспериментальных работ [1–4] показана возможность создания «искусственного двухуровневого атома», обладающего величиной константы взаимодействия атома с полем $\tilde{g} \equiv |g|/\omega_f \sim 1$, т.е. значениями, характерными для ультрасильной связи (УСС) атома с полем. В таких условиях, как показано в теоретических работах [5–17], МДК для динамики среднего числа фотонов и населенностей состояний атома перестает быть справедливой.

В данной работе нами проведены исследования эволюции средних квантовомеханических величин для ТФОФ в условиях УСС и проведено сравнение эволюции средних величин и квантовых флуктуаций этих операторов для различных начальных квантовых состояний электромагнитного поля и двухуровневого атома для МР и МДК.

Рассмотрен случай микроскопических полей с малым числом фотонов, т.е. полей, используемых в настоящее время в экспериментах, связанных с квантовой информацией и квантовым компьютером.

2. ОПЕРАТОРЫ ФАЗЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОИЗВОЛЬНОМ КВАНТОВОМ СОСТОЯНИИ

В работах [18, 19] Пеггом и Барнеттом рассмотрено решение уравнений на собственные функции фазовой переменной в дискретном спектре собственных значений фазы. Расчеты показали, что собственные векторы $|\theta_m\rangle$ операторов фазы поля, рассматриваемые в конечномерном базисе фоковских состояний, для собственных значений фазы

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{S+1}, \quad m = 0, 1, \dots, S, \quad (1)$$

где $S+1$ — неограниченно большая, но конечная размерность базиса фоковских состояний, θ_0 — произвольное число, определяющее интервал изменения

собственных значений фазы ($\theta_0 \leq \theta_m \leq \theta_0 + 2\pi$), составляют полный ортонормированный базис векторов состояний. В работах [18–20] предложено рассматривать дискретный базис собственных векторов состояний фазы в $(S+1)$ -мерном подпространстве фоковских состояний для собственных значений (5) в виде

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{S+1}} \sum_{n=0}^S e^{in\theta_m} |n\rangle. \quad (2)$$

Эрмитов оператор фазы $\hat{\varphi}_\theta$ с собственными значениями θ_m при этом определяется согласно

$$\hat{\varphi}_\theta = \sum_{m=0}^S \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad \hat{\varphi}_\theta |\theta_m\rangle = \theta_m |\theta_m\rangle. \quad (3)$$

Важной особенностью оператора фазы $\hat{\varphi}_\theta$, определяемого согласно (1)–(3), является то, что результаты расчетов средних значений и дисперсий фазы поля качественно зависят от выбора параметра θ_0 . За исключением фоковских $|n\rangle$ и собственных состояний поля оператора фазы $|\theta_m\rangle$, для которых средние и дисперсии не зависят от θ_0 , только правильный выбор значения параметра θ_0 обеспечивает получение физически осмысленных результатов при расчете этих средних величин. Таким образом, в данной теории вид оператора фазы поля зависит от рассматриваемого квантового состояния поля. В то же время, как показано в [18–21], ТФОФ поля (3) имеют вид

$$\cos \hat{\varphi}_\theta = \frac{e^{i\hat{\varphi}_\theta} + e^{-i\hat{\varphi}_\theta}}{2}, \quad \sin \hat{\varphi}_\theta = \frac{e^{i\hat{\varphi}_\theta} - e^{-i\hat{\varphi}_\theta}}{2i}$$

и могут быть записаны с помощью соотношений

$$\begin{aligned} e^{i\hat{\varphi}_\theta} &= \sum_{n=1}^S |n-1\rangle \langle n| + e^{i(S+1)\theta_0} |S\rangle \langle 0|, \\ e^{-i\hat{\varphi}_\theta} &= \sum_{n=1}^S |n\rangle \langle n-1| + e^{-i(S+1)\theta_0} |0\rangle \langle S|, \end{aligned} \quad (4)$$

при этом средние значения ТФОФ $\cos \hat{\varphi}_\theta$ и $\sin \hat{\varphi}_\theta$ не зависят от параметра θ_0 и, следовательно, не зависят от рассматриваемого конкретного квантового состояния поля. Также не зависят от θ_0 и дисперсии эрмитовых ТФОФ поля.

3. МОДЕЛИ РАБИ И ДЖЕЙНСА – КАММИНГСА ДИПОЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХУРОВНЕВОГО АТОМА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Рассмотрим операторы рождения (уничтожения) $\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ электромагнитного поля, удовлетворяющие следующим коммутационным соотношениям:

$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, и оператор числа фотонов, который определяется с помощью таких операторов согласно $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$.

В случае дипольного взаимодействия атома с полем гамильтониан такой системы в квантовой теории может быть записан в виде (гамильтониан МР для двухуровневого атома, взаимодействующего с одномодовым электромагнитным полем)

$$\hat{H} = \hbar\omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}^z}{2} \hbar\omega_a + \hbar\hat{V}, \quad (5)$$

где оператор дипольного взаимодействия атома с полем есть

$$\begin{aligned} \hat{V} &= (g\hat{a}^\dagger + g^*\hat{a})(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) = \\ &= g\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-g^* + g\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+ + \hat{a}\hat{\sigma}_-g^*, \end{aligned} \quad (6)$$

для операторов атомной подсистемы

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^z &= |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \\ \hat{\sigma}_+ &= |e\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e| \end{aligned}$$

и константы дипольного взаимодействия поля с атомом

$$g = \sqrt{\frac{\omega_f}{2\hbar\varepsilon_0 V}} d. \quad (7)$$

Здесь $d \equiv \langle g|\hat{d}|e\rangle = |d_{eg}|e^{i\varphi_d}$ — матричный элемент дипольного перехода атома, в общем случае являющийся комплексным числом; V — объем квантования электромагнитного поля, ω_f — частота поля.

В представлении взаимодействия гамильтониан взаимодействия атома с полем приобретает вид

$$\begin{aligned} \hat{V}_I &= |g|(\hat{a}\hat{\sigma}_+e^{-i\Delta_-t} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-e^{i\Delta_-t} + \\ &+ \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+e^{i\Delta_+t} + \hat{a}\hat{\sigma}_-e^{-i\Delta_+t}), \end{aligned} \quad (8)$$

а уравнение Шредингера для вектора состояния системы атом + поле может быть записано в представлении взаимодействия следующим образом:

$$i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{V}_I|\Psi(t)\rangle. \quad (9)$$

Будем решать уравнение движения (9), используя следующее разложение вектора состояния системы по полному базису фоковских состояний поля $|n\rangle$ и базису квантовых состояний атома; возбужденному $|e\rangle$ и нижнему $|g\rangle$ энергетическим состояниям двухуровневого атома:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}(t)|e, n\rangle + C_{g,n}(t)|g, n\rangle], \\ C_{g,0}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения для амплитуд вероятности, входящих

в (10), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dC_{e,n}(t)}{dt} &= -i|g|[\sqrt{n+1}e^{i\Delta_-t-i\varphi_d}C_{g,n+1}(t) + \\ &+ \sqrt{n}e^{i\Delta_+t+i\varphi_d}C_{g,n-1}(t)], \\ \frac{dC_{g,n}(t)}{dt} &= -i|g|[\sqrt{n+1}e^{-i\Delta_-t+i\varphi_d}C_{e,n+1}(t) + \\ &+ \sqrt{n}e^{-i\Delta_+t-i\varphi_d}C_{e,n-1}(t)], \end{aligned} \quad (11)$$

где обозначено $\Delta_- \equiv \omega_a - \omega_f$, $\Delta_+ \equiv \omega_f + \omega_a$, $g = |g|e^{i\varphi_d}$.

Введем безразмерные параметры

$$\tilde{\Delta}_- \equiv \frac{\omega_a - \omega_f}{|g|}, \quad \tilde{\Delta}_+ \equiv \frac{\omega_f + \omega_a}{|g|},$$

а также

$$\begin{aligned} \Omega_n &\equiv \sqrt{\tilde{\Delta}_-^2 + 4(n+1)}, \quad \Omega_{n-1} \equiv \sqrt{\tilde{\Delta}_-^2 + 4n}, \\ t_g &\equiv |g|t. \end{aligned}$$

Предположим далее, что частота поля в общем случае не совпадает с частотой перехода атома и константа g взаимодействия поля с атомом является комплексным числом, а в гамильтониане взаимодействия атома с полем (8) два последних слагаемых, ответственных за виртуальные переходы, равны нулю (приближение вращающейся волны). Тогда уравнение Шредингера для атома в поле может быть решено аналитически. Точное аналитическое решение системы уравнений в приближении вращающейся волны МДК (коэффициенты разложения по фоковским состояниям $C_{e,n}(t)$ и $C_{g,n}(t)$) может быть записано в виде [22]

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t_g) &= C_{e,n}(0)A_n(t_g) - C_{g,n+1}(0)B_n(t_g), \\ C_{g,n}(t_g) &= C_{g,n}(0)A_{n-1}^*(t_g) + C_{e,n-1}(0)B_{n-1}^*(t_g), \end{aligned} \quad (12)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A_n(t_g) &\equiv \left[\cos \frac{\Omega_n t_g}{2} - \frac{i\tilde{\Delta}_-}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t_g}{2} \right] e^{i\tilde{\Delta}_- t_g/2}, \\ B_n(t_g) &\equiv 2i \frac{\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t_g}{2} e^{i\varphi_d} e^{i\tilde{\Delta}_- t_g/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

4. ДИНАМИКА КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ СРЕДНИХ И ФЛУКТУАЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ФАЗЫ ПОЛЯ

Согласно теории эрмитова оператора фазы поля $\hat{\varphi}$ [18–21] (нижний индекс θ в обозначении оператора фазы в дальнейшем в записи будет опускаться) средние квантовомеханические значения ТФОФ

поля для любого квантового состояния поля $|\Psi(t)\rangle$ имеют вид

$$\begin{aligned}\langle \cos \hat{\varphi}(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | \cos \hat{\varphi} | \Psi(t) \rangle = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}^*(t) C_{e,n+1}(t) + \\ &\quad + C_{g,n}^*(t) C_{g,n+1}(t)], \\ \langle \sin \hat{\varphi}(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | \sin \hat{\varphi} | \Psi(t) \rangle = \\ &= \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}^*(t) C_{e,n+1}(t) + \\ &\quad + C_{g,n}^*(t) C_{g,n+1}(t)].\end{aligned}\quad (14)$$

Для средних квадрата ТФОФ, необходимых для расчета дисперсий (флуктуаций) этих величин, для произвольных состояний поля и атома $|\Psi(t)\rangle$ находим

$$\begin{aligned}\langle (\cos \hat{\varphi})^2(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | \cos^2 \hat{\varphi} | \Psi(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}^*(t) C_{e,n+2}(t) + \\ &\quad + C_{g,n}^*(t) C_{g,n+2}(t)], \\ \langle (\sin \hat{\varphi})^2(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | \sin^2 \hat{\varphi} | \Psi(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}^*(t) C_{e,n+2}(t) + \\ &\quad + C_{g,n}^*(t) C_{g,n+2}(t)].\end{aligned}\quad (15)$$

Использование соотношений (15) позволяет найти выражения для дисперсий (флуктуаций) ТФОФ $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2(t) \rangle \equiv \langle (\cos \hat{\varphi})^2(t) \rangle - \langle \cos \hat{\varphi}(t) \rangle^2$ и $\langle (\Delta \sin \hat{\varphi})^2(t) \rangle \equiv \langle (\sin \hat{\varphi})^2(t) \rangle - \langle \sin \hat{\varphi}(t) \rangle^2$ путем численного решения системы связанных дифференциальных уравнений (11) в рамках МР.

5. ФОКОВСКОЕ НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЯ

Рассмотрим случай, когда исходное поле при $t = 0$ находится в чистом фоковском состоянии $|n_0\rangle$. При этом в общем случае начальные значения коэффициентов разложения вектора состояния системы отличны от нуля $C_{s,n_0}(0) \neq 0$ для $s = e, g$, а все остальные $C_{s,n}(0) = 0, n \neq n_0$.

В этом случае решение МДК (12), (13), использующей приближение RWA, приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}C_{e,n_0}(t_g) &= C_{e,n_0}(0) A_{n_0}(t_g), \\ C_{e,n_0-1}(t_g) &= -C_{g,n_0}(0) B_{n_0-1}(t_g), \\ C_{g,n_0}(t_g) &= C_{g,n_0}(0) A_{n_0-1}^*(t_g), \\ C_{g,n_0+1}(t_g) &= C_{e,n_0}(0) B_{n_0}^*(t_g).\end{aligned}\quad (16)$$

Остальные $C_{e,n}(t_g) = C_{g,n}(t_g) = 0$ для $n \neq n_0, n_0 - 1$ или $n \neq n_0, n_0 + 1$ соответственно.

Для безразмерного времени в (16) использовано обозначение $t_g \equiv |g|t$.

Если начальное состояние атома $|e\rangle$, то ненулевыми коэффициентами разложения вектора состояния системы являются

$$\begin{aligned}C_{e,n_0}(t_g) &= C_{e,n_0}(0) A_{n_0}(t_g), \\ C_{g,n_0+1}(t_g) &= C_{e,n_0}(0) B_{n_0}^*(t_g).\end{aligned}\quad (17)$$

Если же начальное состояние атома $|g\rangle$, то ненулевыми являются зависимости от времени

$$\begin{aligned}C_{e,n_0-1}(t_g) &= -C_{g,n_0}(0) B_{n_0-1}(t_g), \\ C_{g,n_0}(t_g) &= C_{g,n_0}(0) A_{n_0-1}^*(t_g).\end{aligned}\quad (18)$$

Используя формулы (16)–(18) и (14), нетрудно убедиться, что в случае начального фоковского состояния поля для исходных состояний атома $|e\rangle$ и $|g\rangle$ квантовомеханические средние ТФОФ (14) равны нулю: $\langle \cos(\hat{\varphi}(t)) \rangle_{n,RWA} = \langle \sin(\hat{\varphi}(t)) \rangle_{n,RWA} = 0$, что соответствует равномерному распределению случайных значений фазы поля от 0 до 2π для любого момента времени. Аналогично получаем из (16)–(18) и (15), что дисперсии $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2(t) \rangle_{n,RWA} = \langle (\Delta \sin \hat{\varphi})^2(t) \rangle_{n,RWA} = 1/2$ и не меняются во времени для фоковских начальных состояний поля и для начальных состояний атома $|e\rangle$ или $|g\rangle$.

На рис. 1а,б показаны зависимости от времени дисперсии $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2(t) \rangle_{n,RWA}$ и $\langle (\Delta \cos(\hat{\varphi}(t)))^2 \rangle_{n,MR}$ (т.е. для МДК и МР соответственно) в условиях УСС для начального состояния $|g\rangle$ и $|e\rangle$ атома и начального состояния поля $|1\rangle$. На рисунке видно, что результаты двух моделей противоречат друг другу. МДК предсказывает, что дисперсии ТФОФ поля не изменяются во времени при взаимодействии атома с полем, тогда как МР указывает в условиях УСС на сложную зависимость от времени этих величин. Из рисунков также следует (ср. рис. 1а и рис. 1б), что характер эволюции дисперсий во времени качественно зависит от начального состояния атома.

Расчеты показывают также, что средние значения ТФОФ совпадают в таких условиях между собой для обеих моделей и равны нулю для любого момента времени.

Результаты расчетов не зависят от значения фазы матричного элемента перехода φ_d .

Качественно иная зависимость от времени средних и дисперсий операторов фазы поля характерна для случая начального состояния суперпозиции

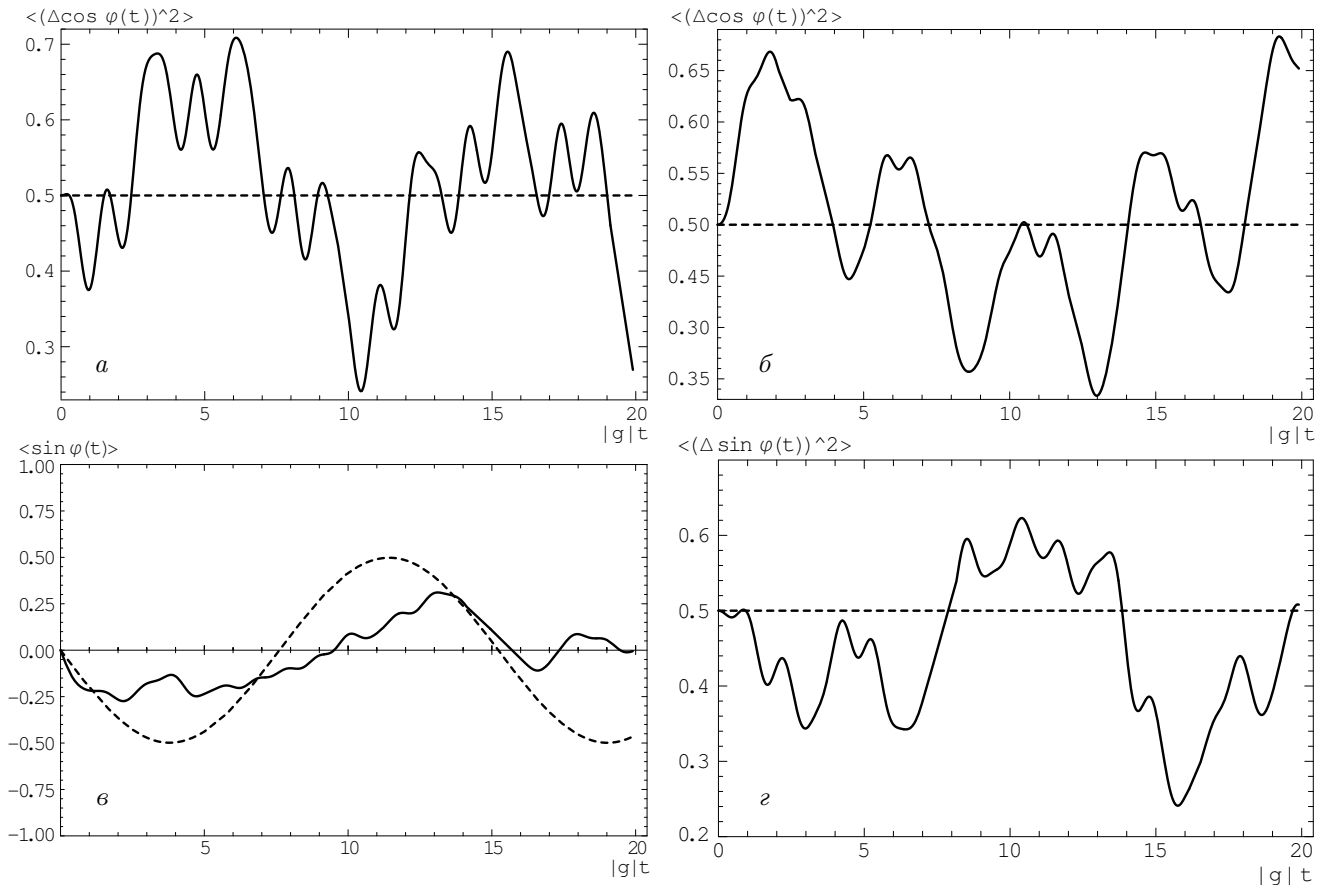


Рис. 1. *а* — Зависимость от времени дисперсии оператора косинуса фазы поля $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2 \rangle$, следующая из модели Раби для системы атом + поле в начальном фоковском состоянии поля ($|1\rangle$) и невозбужденном состоянии атома $|g\rangle$, для значения безразмерной константы связи $g/\omega_f = 0.5$. Значение фазового угла матричного элемента перехода $\varphi_d = 0$. Штриховой линией показана аналогичная зависимость, полученная в рамках модели Джейнса–Каммингса. *б* — Зависимость от времени дисперсии оператора косинуса фазы поля $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2 \rangle$ для системы атом + поле в начальном фоковском состоянии поля ($|1\rangle$) и возбужденном состоянии атома $|e\rangle$ для тех же значений параметров. *в* — Зависимость от времени среднего значения оператора синуса фазы поля теории Перга–Барнетта $\langle \sin \hat{\varphi} \rangle$, следующая из модели Раби для системы атом + поле в начальном фоковском состоянии поля ($|n = 1\rangle$) и состоянии суперпозиции атома $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$ для значения безразмерной константы связи $g/\omega_f = 0.5$. Значение фазового угла матричного элемента перехода $\varphi_d = 0$. Штриховой линией показана аналогичная зависимость, полученная в рамках модели Джейнса–Каммингса. *г* — Зависимость от времени дисперсии оператора синуса фазы поля $\langle (\Delta \sin \hat{\varphi})^2 \rangle$ для системы атом + поле в начальном состоянии поля ($|n = 1\rangle$) и состоянии суперпозиции атома для значения фазового угла матричного элемента перехода $\varphi_d = \pi/2$ для тех же значений остальных параметров. Штриховой линией показана аналогичная зависимость, полученная в рамках модели Джейнса–Каммингса

возбужденного и нижнего энергетических состояний атома:

$$|\psi_a(t=0)\rangle = C_e|e\rangle + C_g|g\rangle. \quad (19)$$

На рис. 1в,г показаны примеры зависимостей средних значений оператора синуса фазы поля для начального состояния суперпозиции атома и УСС. Как видно на рис. 1в, среднее оператора синуса фазы отлично от нуля как для МДК, так и для МР и обладает сложной зависимостью этой величины от времени в МР в режиме УСС. Эти зависимости качественно отличаются друг от друга для двух моделей. МДК предсказывает регулярное изменение средних

операторов фазы во времени, подобное осцилляциям Раби.

Как показано на рис. 1г, дисперсии (флуктуации) оператора синуса изменяются во времени в рамках МР и с высокой точностью остаются неизменными в теории МДК в рассмотренном случае начального условия суперпозиции атомных состояний и фоковского состояния поля. В данном случае среднее оператора синуса близко к нулю для любого момента времени. Изменение значения фазового угла матричного элемента перехода между состояниями атома φ_d приводит к резкому увеличению в рамках МДК амплитуд осцилляций во времени средне-

го значения оператора синуса фазы и его дисперсии (флуктуаций) и значительному их отличию от 0 и $1/2$ соответственно.

Отметим, что на интервале изменения нормированного безразмерного времени $\Delta(|g|t) > 1000$ рассматриваемые средние и дисперсии принимают хаотический вид в интервалах изменения этих величин.

6. КОГЕРЕНТНОЕ НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЯ

Рассмотрим в качестве квантового состояния измеряемого поля когерентное состояние

$$|\alpha\rangle = e^{-n_\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \alpha = \sqrt{n_\alpha} e^{i\varphi_\alpha}, \quad n_\alpha \equiv |\alpha|^2.$$

Как видно на рис. 2а, изменение во времени среднего значения $\langle \cos(\hat{\varphi}(t)) \rangle_{\alpha, NRWA}$, рассчитанного в рамках МР (NRWA) для начального когерентного состояния поля $|\alpha\rangle$ и возбужденного состояния атома $|e\rangle$, обладает сложной нерегулярной зависимостью от времени и не имеет характера стандартных регулярных осцилляций Раби. На рис. 2а динамика среднего значения оператора фазы поля сравнивается с аналогичной зависимостью $\langle \cos(\hat{\varphi}(t)) \rangle_{\alpha, RWA}$, полученной с использованием приближения RWA. На рисунке видно, что в рассматриваемом нами случае ультрасильной связи МР дает качественно отличную зависимость от времени средних оператора фазы поля на всем интервале времени за исключением пренебрежимо малых значений $|g|t$. На рис. 2б показаны зависимости дисперсий $\langle (\Delta \cos(\hat{\varphi}(t)))^2 \rangle_{\alpha, NRWA}$ и $\langle (\Delta \cos(\hat{\varphi}(t)))^2 \rangle_{\alpha, RWA}$, полученные в рамках МР и МДК соответственно, для тех же значений параметров. Расчеты показывают, что так же, как и в случае квантовых средних значений ТФОФ поля, в условиях УСС результаты двух моделей качественно различны. Приближение RWA, имеющее место в теории Джейнса–Каммингса, для случая УСС атома с полем, оказывается несправедливо.

Наши расчеты показали, что абсолютные значения средних и дисперсий ТФОФ поля качественно зависят от начального значения фазового угла начального когерентного состояния поля φ_α (см. рис. 2 и рис. 3 для сравнения). Таким образом, сам характер эволюции средних значений и дисперсий ТФОФ поля во времени зависит от начального значения фазового угла когерентного состояния поля.

В то же время, как показали наши расчеты, динамика средних и дисперсий фазы поля для начальных состояний атома $|g\rangle$ или $|e\rangle$ не зависит от значения фазового угла матричного элемента перехода

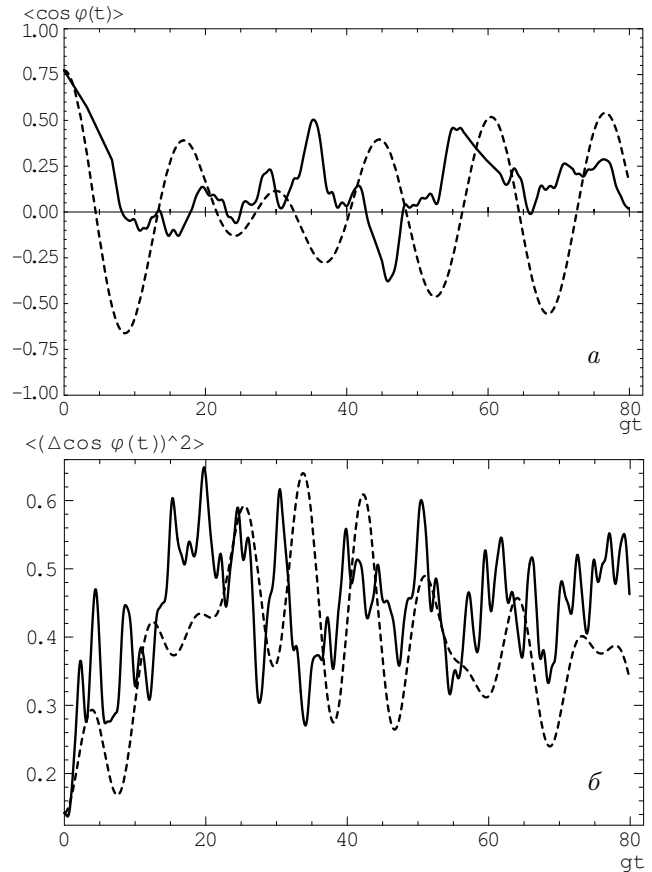


Рис. 2. а — Зависимости от времени среднего значения оператора косинуса фазы поля теории Пеппа–Барнетта $\langle \cos \hat{\varphi} \rangle$, следующая из модели Раби для системы атом + поле в начальном когерентном состоянии поля ($|\alpha| = 1$) и возбужденном состоянии атома $|e\rangle$, для значения безразмерной константы связи $g/\omega_f = 0.7$, $\omega_A = 1.1\omega_f$. Значение фазового угла матричного элемента перехода $\varphi_d = 0$. Штриховой линией показана аналогичная зависимость, полученная в рамках модели Джейнса–Каммингса. б — Зависимости от времени дисперсии оператора косинуса фазы поля $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2 \rangle$ для системы атом + поле в начальном когерентном состоянии поля ($|\alpha| = 1$) и возбужденном состоянии атома $|e\rangle$ для тех же значений параметров

да φ_d . Качественная зависимость от этого параметра возникает в случае начального состояния атома суперпозиции вида (19). На рис. 4 представлены зависимости от времени среднего и дисперсии оператора косинуса фазы для $\varphi_d = \pi/2$ в случае начального состояния суперпозиции атома $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$ и когерентного состояния поля. Расчеты показали, что для $\varphi_d = 0$ и тех же значений параметров системы динамика рассматриваемых средних и дисперсий качественно отличается от динамики в случае $\varphi_d = \pi/2$ в условиях УСС.

При увеличении числа фотонов начального когерентного состояния n_α различие между результа-

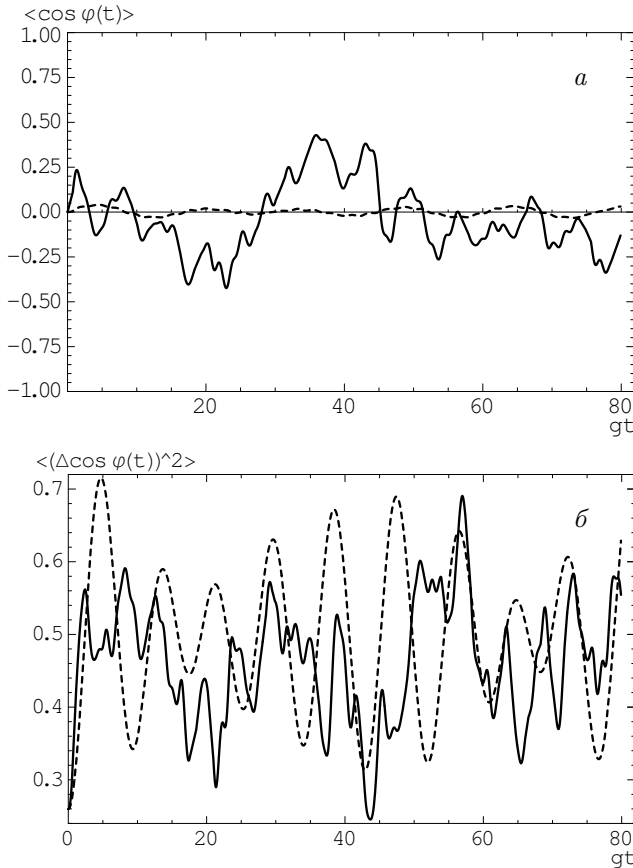


Рис. 3. *а* — Зависимости от времени среднего значения оператора косинуса фазы поля теории Пега-Барнетта $\langle \cos \hat{\varphi} \rangle$, следующая из модели Раби (NRWA) для системы атом + поле в начальном когерентном состоянии поля ($|\alpha = e^{i\pi/2}\rangle$) и возбужденном состоянии атома $|e\rangle$, для значения безразмерной константы связи $g/\omega_f = 0.7$, $\omega_A = 1.1\omega_f$. Значение фазового угла матричного элемента перехода $\varphi_d = 0$. Штриховой линией показана аналогичная зависимость, полученная в рамках модели Джейнса-Каммингса (RWA). *б* — Зависимости от времени дисперсии оператора косинуса фазы поля $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2 \rangle$ для системы атом + поле в начальном когерентном состоянии поля ($|\alpha = e^{i\pi/2}\rangle$) и возбужденном состоянии атома $|e\rangle$ для тех же значений параметров

тами теорий МДК и МР для эволюции поля уменьшается как для средних значений, так и для дисперсий тригонометрических операторов фазы и для мезоскопических когерентных состояний с $n_\alpha \gg 1$ практически совпадают для УСС.

При этом в случае когерентного начального состояния поля при $n_\alpha \gg 1$ и состояния атома суперпозиции (19) присутствует ярко выраженное явление коллапса и возрождения как для средних значений, так и для дисперсий ТФОФ поля. Так, при $n_\alpha = 30$ ($|\tilde{g}| = 0.1$, $\tilde{\Delta}_- = 1$) и в интервале изменения безразмерного времени $700 < |g|t < 1100$ для сред-

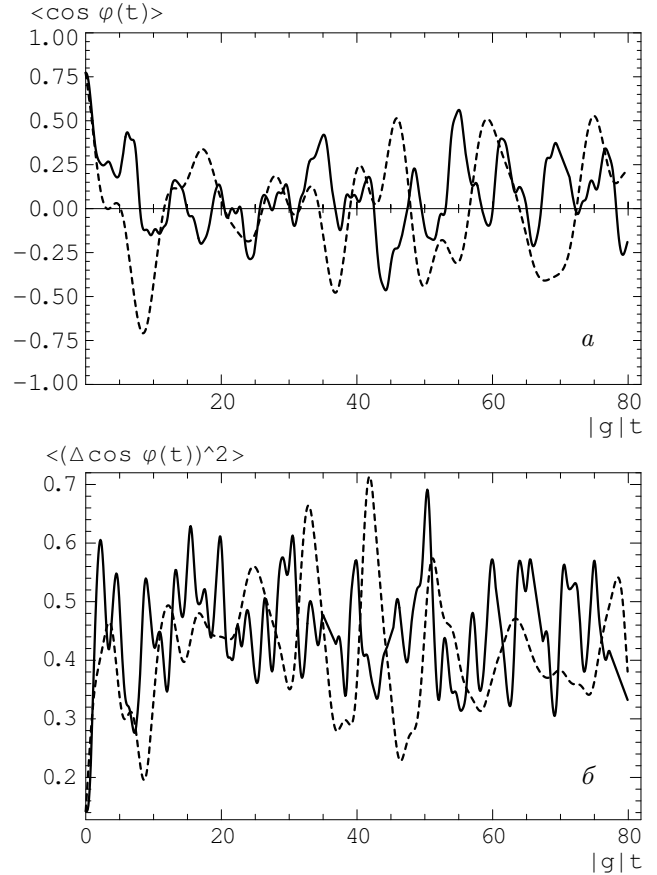


Рис. 4. *а* — Зависимости от времени среднего значения оператора косинуса фазы поля теории Пега-Барнетта $\langle \cos \hat{\varphi} \rangle$, следующая из модели Раби (NRWA) для системы атом + поле в начальном когерентном состоянии поля ($|\alpha = 1\rangle$) и суперпозиционном состоянии атома $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$, для значения безразмерной константы связи $g/\omega_f = 0.7$, $\omega_A = 1.1\omega_f$. Значение фазового угла матричного элемента перехода $\varphi_d = \pi/2$. Штриховой линией показана аналогичная зависимость, полученная в рамках модели Джейнса-Каммингса (RWA). *б* — Зависимости от времени дисперсии оператора косинуса фазы поля $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2 \rangle$ для системы атом + поле в начальном когерентном состоянии поля ($|\alpha = 1\rangle$) и суперпозиционном состоянии атома $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$ для тех же значений параметров

них значений операторов имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \langle \cos(\hat{\varphi}(t)) \rangle_{n,RWA/NRWA}, \langle \sin(\hat{\varphi}(t)) \rangle_{n,RWA/NRWA} &\approx 0, \\ \langle (\Delta \cos(\hat{\varphi}(t)))^2 \rangle_{n,NRWA}, \langle (\Delta \cos(\hat{\varphi}(t)))^2 \rangle_{n,RWA} &\approx \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(то же для операторов $\sin$). При $|g|t < 700$ имеют место затухающие регулярные осцилляции Раби. С ростом времени взаимодействия $|g|t > 1100$ осцилляции Раби указанных величин восстанавливаются, т.е. явление коллапса сменяется эффектом возрождения осцилляций Раби [14,17,22–27]. При $|g|t < 700$

имеют место затухающие осцилляции как средних, так и дисперсий. Следует отметить, что значения средних и дисперсий ТФОФ поля в интервале изменения времени, для которого присутствует квантовый эффект коллапса, характерны для фоковского состояния поля.

Эффект коллапса и возрождения осцилляций рассмотренных величин имеет место для любых начальных состояний атома.

Частота временных осцилляций рассмотренных величин значительно отличается от доминантной частоты осцилляций Раби $\Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n_\alpha + 1)}$, $\Delta \equiv \omega_a - \omega_f$, характерной для осцилляций Раби инверсии населенности атома для начального когерентного состояния поля [14, 17, 27].

Из сказанного выше также можно сделать вывод, что для исследования эволюции средних значений и дисперсий ТФОФ поля в рамках теории оператора фазы Пегга–Барнетта применимо как приближение МДК (RWA), так и МР (NRWA) для мезо- и макрополей с большим числом фотонов в условиях УСС.

Для малого числа фотонов когерентного состояния поля $n_\alpha \sim 1$ при УСС характер эволюции средних значений и дисперсий ТФОФ поля качественно зависит от фазового угла когерентного начального состояния поля φ_α для любого начального состояния атома, при этом регулярные осцилляции Раби и эффект коллапса и возрождения отсутствуют.

Зависимость динамики изменения указанных величин от фазового угла дипольного момента перехода атома φ_d имеет место только в случае начального состояния атома (19) для малых значений $n_\alpha \sim 1$ (см. рис. 4), в то же время при больших $n_\alpha > 10$ эволюция средних значений и дисперсий ТФОФ поля практически не зависит от φ_d для любых начальных состояний атома. Следует отметить, что эволюция средних и дисперсий операторов фазы слабо зависит от начального состояния атома в случае больших чисел фотонов $n_\alpha > 10$ начального когерентного состояния поля.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе нами проведено исследование эволюции во времени средних квантовомеханических значений (наблюдаемых) и дисперсий (квантовых флуктуаций) ТФОФ поля при взаимодействии поля с атомом. Рассмотрен и проанализирован случай УСС атома и поля. Для расчетов использована квантовомеханическая модель Раби и теория эрмита оператора фазы электромагнитного поля Пег-

га–Барнетта. Рассмотрен случай квантовых микрополей со средним числом фотонов ~ 1 . Проведено сравнение характера эволюции указанных величин, следующего из теории Раби и приближенной теории Джейнса–Каммингса, использующей приближение вращающейся волны в условиях УСС.

Анализ проведен для различных начальных квантовых состояний поля и двухуровневого атома.

Если электромагнитное поле в начальный момент времени находится в фоковском состоянии, результаты МР принципиально отличаются от результатов расчета эволюции средних и/или дисперсий ТФОФ поля в условиях УСС. Нами показано, что в случае начального состояния атома в возбужденном или нижнем энергетическом состоянии дисперсии операторов фазы в рамках МДК остаются неизменными во времени, тогда как МР предсказывает сложную зависимость от времени дисперсий ТФОФ поля. При начальном состоянии суперпозиции двух состояний атома качественное отличие результатов МР и МДК присутствует как для средних значений, так и для дисперсий операторов. В этом случае имеет место качественная зависимость характера эволюции средних и флуктуаций ТФОФ поля от фазового угла матричного элемента дипольного перехода между состояниями атома.

Нами показана неприменимость МДК (приближения вращающейся волны, RWA) для расчета эволюции операторов фазы в условиях УСС для фоковских начальных состояний поля.

Если начальное состояние поля является когерентным $|\alpha\rangle$ с малым числом фотонов $n_\alpha \sim 1$, то приближение RWA (МДК) оказывается неприменимым для расчета динамики средних и дисперсий ТФОФ поля в условиях УСС для любого начального состояния атома, взаимодействующего с полем. С ростом n_α различие результатов МР и МДК сокращается и при $n_\alpha \gg 10$ результаты обеих моделей почти не различаются между собой для любых начальных состояний атома в условиях УСС.

В данной работе показано, что эволюция рассматриваемых величин качественно зависит от фазового угла начального когерентного состояния микроскопического поля φ_α для любых начальных состояний атома, а также при УСС качественно зависит от значения фазового угла φ_d матричного элемента перехода атома в случае начального состояния суперпозиции состояний атома.

Показано, что в случае начального когерентного состояния поля с числом фотонов $n_\alpha \gg 1$ и при произвольном начальном состоянии атома для эволюции во времени средних значений и дисперсий

ТФОФ поля характерно явление коллапса и возрождения осцилляций Раби этих величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Forn-Díaz, L. Lamata, E. Rico, J. Kono, and E. Solano, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 25005 (2019).
2. T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J. J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hümmer, E. Solano, A. Marx, and R. Gross, *Nature Phys.* **6**, 772 (2010).
3. A. Le Boité, *Adv. Quantum Technol.* **37**, 1900140 (2020).
4. A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. DeLiberato, S. Savasta, and F. Nori, *Nature Rev. Phys.* **1**, 19 (2019).
5. Shuangshuang Fu, Shunlong Luo, and Yue Zhang, *Quantum Inf. Proces.* **20**, 88 (2021).
6. Jin-Sheng Peng and Gao-xiang Li, *Phys. Rev. A* **45**, 3289 (1992).
7. I. Feranchuk, A. Ivanov, Van-Hoang Le, and A. Ulyanov, *Non-perturbative Description of Quantum Systems*, *Lecture Notes Phys.* **894**, 362 (2015).
8. F. A. Wolf, M. Kollar, and D. Braak, *Phys. Rev. A* **85**, 053817 (2012).
9. Qing-Hu Chen, Tao Liu, Yu-Yu Zhang, and Ke-Lin Wang, *EPL* **96**, 14003 (2011), www.epljournal.org, doi: 10.1209/0295-5075/96/14003.
10. Jin-sheng Peng and Gao-xiang Li, *Phys. Rev. A* **47**, 3167 (1993).
11. T. Werliang, A. V. Dodonov, E. L. Duzzioni, and C. J. Villas-Boas, *Phys. Rev. A* **78**, 053805 (2008).
12. Ho Trung Dung, R. Tanaś, and A. S. Shumovsky, *J. Mod. Opt.* **38**, 2069 (1991).
13. Ho Trung Dung, R. Tanas, and A. S. Shumovsky, *Opt. Commun.* **79**, 462 (1990).
14. H. X. Meng, C. L. Chai, and Z. M. Zhang, *Phys. Rev. A* **45**, 2131 (1992).
15. A. A. Faisal El-Orany, M. H. Mahran, M. R. B. Wahiddin, and A. M. Hashim, *Opt. Commun.* **240**, 169 (2004).
16. M. H. Naderi, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 055304 (2011).
17. Qiongtao Xie, Honghua Zhong, M. T. Batchelor, and Chaohong Lee, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 113001, (2017).
18. D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Phys. Rev. A* **39**, 1665 (1989).
19. S. M. Barnett and D. T. Pegg, *J. Phys. A* **19**, 3849 (1986).
20. P. Carruthers and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **40**, 411 (1968).
21. A. V. Kozlovskii, *J. Mod. Opt.* **66**, 463 (2019).
22. В. П. Шляйх, *Квантовая оптика в фазовом пространстве*, Физматлит, Москва (2005).
23. J. H. Eberly, N. B. Narozhny, and J. J. Sanchez-Mondragon, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1323 (1980).
24. N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon, and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **23**, 236 (1981).
25. H. I. Yoo, J. J. Sanchez-Mondragon, and J. H. Eberly, *J. Phys. A* **14**, 1383 (1981).
26. J. Eiselt and H. Risken, *Phys. Rev. A* **43**, 346 (1991).
27. А. В. Козловский, *КЭ* **40**, 223 (2010).