ЖЭТФ, 2024, том 165, вып. 3, стр. 341–354 © 2024

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЕКТРА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА ШТАРКА

А. В. Демура [a*], ***Д. С. Леонтьев*** [a], ***В. С. Лисица*** [a,b,c]

[a] *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» 123182, Москва, Россия*

[b] *Национальный исследовательский университет «МФТИ» 141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

[c] *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» 115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 27 октября 2023 г.,
после переработки 15 ноября 2023 г.
Принята к публикации 15 ноября 2023 г.

Проведено детальное исследование физических процессов, ответственных за образование спектра атома водорода, возникающего при движении атома поперек сильного магнитного поля — так называемый электродинамический эффект Штарка, известный также как MSE (Motional Stark Effect). Исследованы механизмы формирования населенностей возбужденных водородных уровней при столкновениях с протонами плазмы. Сопоставлены данные теории и экспериментов по полным и парциальным по параболическим квантовым числам сечениям возбуждения уровней в системе координат движущегося атома. Предложен универсальный подход для расчета сечений с учетом их адиабатического уменьшения в области малых энергий в параболическом базисе волновых функций, селективный по параболическим квантовым числам. Развитый метод применен для построения радиационно-столкновительной кинетической модели для расчета парциальных населенностей возбужденных штарковских подуровней с учетом ионизации протонами. Выявлены источники термодинамически неравновесной природы населенностей штарковских подуровней электродинамического эффекта Штарка в широком диапазоне изменения плотности плазмы. Рассчитаны интенсивности штарковских π- и σ-компонент линии H_α в зависимости от энергии пучка, величины магнитного поля и плотности плазмы. Рассчитаны некоторые поляризационные характеристики спектров MSE в термоядерной плазме с магнитным удержанием. Полученные результаты находятся в разумном соответствии с имеющимися литературными данными. Развитый подход представляет интерес как общефизический, так и для MSE-спектроскопии в токамаках и других экспериментальных условий.

DOI: 10.31857/S0044451024030040

1. ВВЕДЕНИЕ

Наблюдение электродинамического эффекта Штарка или MSE (Motional Stark Effect) применяется в целях диагностики при зондировании плазмы пучком нейтрального водорода поперек магнитного поля $\mathbf{B}$. При этом регистрация и анализ поляризационных характеристик эмиссионного спектра, формирующегося в электрическое поле

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c},$$

возникающем в системе координат движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ атома при пересечении им магнитных силовых линий, дают информацию о величине и распределении магнитных полей и связанных с ними токов [1–7], где c — скорость света. Действительно, спектр водородного атома в стационарном однородном электрическом поле $\mathbf{F}$ состоит из штарковских π-компонент, поляризованных вдоль $\mathbf{F}$, и σ-компонент с поляризацией поперек $\mathbf{F}$, расщепление которых пропорционально величине электрического поля [1, 2]. Вследствие этого при отсутствии изотропии для реальной геометрии плазменной установки, например, токамака, можно выделять и анализировать поляризованные составляющие наблюдаемого эмиссионного спектра [1–20]. Экспериментальные реализации методики являются локальными и обладают довольно хорошим пространственным разрешением [1–20]. В случае токамака ее можно применить для выявления профиля наклона магнитной

* E-mail: demura45@gmail.com

силовой линии $\gamma_p(r) = \mathrm{arctg}(B_p(r)/B_t)$ (где $\mathbf{B}_t$ — тороидальное, а $\mathbf{B}_p$ — связанное с током разряда полоидальное магнитные поля, r — величина малого радиуса, отсчитываемого от положения магнитной оси плазмы в тороидальной разрядной камере) путем определения локальных отклонений вектора $\mathbf{B}$ от исходного вектора тороидального поля $\mathbf{B}_t$ на малый угол [1–7]. Знание профиля угла магнитной силовой линии, в свою очередь, позволяет установить пространственные распределения абсолютных величин параметров разряда, например коэффициента запаса устойчивости шнура, разрядного тока, и оценить профиль плотности тока в разряде токамака [1–7].

Проблеме MSE-диагностики посвящена обширная литература, в которой обсуждаются как теоретические основы метода MSE [1–20], так и его реализация и интерпретация в эксперименте [1–20]. Однако обе эти задачи являются очень комплексными и сложными. В настоящей же работе рассматриваются только теоретические аспекты этой проблемы.

Для использования MSE-диагностики в эксперименте предполагается измерение интенсивности и поляризации излучения атомов пучка в плазме. Для этого необходимо знать населенности штарковских подуровней. Это предполагает решение задачи по атомной кинетике штарковских состояний. Для решения кинетической задачи штарковских подуровней необходимы скоростные коэффициенты столкновительных и радиационных процессов в базисе параболических волновых функций водородного атома, которые включают описание возбуждения, девозбуждения, радиационного распада и ионизации при столкновениях с протонами и электронами плазмы с учетом переходов как между уровнями с разным главным квантовым числом n, так и между подуровнями одного n. Специфика этой кинетической задачи состоит в необходимости использования штарковского (параболического) базиса, в то время как ранее такого рода данные рассчитывались только в базисе сферических волновых функций с усреднением по магнитным квантовым числам, вовлеченных во взаимодействие уровней атома [11, 17–20]. На следующем шаге населенности штарковских состояний используются для вычисления спектра излучения и определения его поляризационных характеристик для целей MSE-диагностики. На выходные данные влияют не только выбор базиса волновых функций, но и методы и приближения, используемые для вычисления сечений процессов и их скоростных коэффициентов в условиях отсутствия термодинамического равновесия и в присутствии внешнего электрического поля электродинамической природы.

В отличие от ранее полученных результатов, в данной работе на всех этапах расчета используется параболический базис волновых функций и борновские сечения столкновительных процессов с нормированной вероятностью соответствующих переходов. Отклонение от борновского приближения в области малых скоростей учитывается введением адиабатического фактора, возникающего из расчетов методом сильной связи двухуровневой системы [21]. Проведенное детальное сравнение с литературными данными [11, 22–24] демонстрирует высокую эффективность и надежность предлагаемого подхода и полученных результатов.

2. РАСЧЕТ СЕЧЕНИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ ШТАРКОВСКИХ ПОДУРОВНЕЙ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ БАЗИСЕ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ВОДОРОДОПОДОБНОГО ИОНА

2.1. Общие положения

Наблюдаемый спектр излучения штарковской структуры уровней, образующейся при движении пучка быстрых атомов поперек магнитного поля, формируется атомными процессами, определяющими населенности верхних уровней индивидуальных штарковских компонент. Возбуждение штарковских подуровней (компонент) определяется в основном столкновениями с быстрыми протонами, движущимися с надтепловой скоростью в системе координат атома. Характерные скорости нейтралов диагностических пучков [11, 17–20], а следовательно, и в протон-атомных столкновениях сравнимы или несколько превосходят значения типичных величин атомных скоростей электронов на первой боровской орбите, отвечающих энергии протонов порядка 25 кэВ. С точки зрения физики атомных столкновений этот диапазон скоростей является промежуточным между быстрыми (борновский предел) и медленными (адиабатический предел) столкновениями. Параметр адиабатичности, определяемый отношением разности энергий верхнего и нижнего уровней к частоте возмущения, сильно различается для переходов из основного состояния и между возбужденными уровнями. Для переходов из основного состояния учет адиабатического фактора существен, тогда как для переходов между возбужденными уровнями им можно пренебречь, если разность энергий соответствующих уровней невелика, например, для переходов между состояниями с одним и тем же главным квантовым числом n.

При рассмотрении неупругих столкновений тяжелых частиц — атомов водорода с протонами — импульс быстрой частицы практически не меняется [25], а эффективный переданный импульс $\mathbf{q}$ относительно мал и с хорошей точностью практически перпендикулярен импульсу падающей частицы [25]. Для расчета эффективных сечений возбуждения переходов в атоме водорода при столкновениях с протонами в работе используются параболические волновые функции. Рассмотрение разбито на три случая: 1) возбуждение из основного состояния; 2) переходы между возбужденными состояниями; 3) переходы между штарковскими подуровнями внутри данного уровня с главным квантовым числом n.

На рис. 1 представлена схема взаимного направления векторов в лабораторной системе координат пучка: $\mathbf{q}$ — переданный импульс, который лежит в одной плоскости с индуцированным электрическим полем $\mathbf{F}$ и составляет с ним произвольный угол α; $\mathbf{B}$ — вектор магнитного поля, $\mathbf{v}$ — скорость ионов плазмы, которые налетают на нейтралы диагностического пучка в лабораторной системе. Эта скорость по величине равна скорости пучка $\mathbf{V}$ и направлена в противоположную сторону.

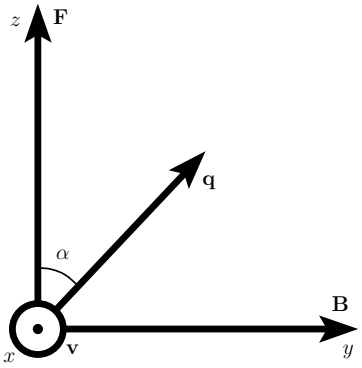

Рис. 1. Схема векторов MSE

Расчет эффективных сечений столкновения проводился в первом борновском приближении [24, 25] (атомные единицы):

$$\sigma(v) = 2\pi \int\limits_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{dq}{q^3} W(q), \qquad q_{min} = \frac{\Delta E}{v}, \quad q_{max} = 2v, \tag{1}$$

где ΔE — разница энергий между уровнями, $W(q)$ — вероятность перехода, определяемая формулой

$$W(q) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} W(\alpha, q), \quad W(\alpha, q) = \frac{4|R(\alpha, q)|^2}{v^2}, \tag{2}$$

$R(\alpha, q)$ — матричный элемент перехода [25]. В параболическом базисе (с учетом выбранной геометрии задачи) он имеет вид

$$R(\alpha, q) = \langle n'k'm'|e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}|nkm\rangle = \int\limits_0^{\infty} d\xi \int\limits_0^{\infty} d\eta \, \frac{\xi+\eta}{4} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \, \Psi^*_{n'k'm'}(\xi, \eta, \varphi) \times \exp\left\{ iq \left(\frac{\xi-\eta}{2} \cos\alpha + \sqrt{\xi\eta} \, \sin\alpha \, \sin\varphi \right) \right\} \times \Psi_{nkm}(\xi, \eta, \varphi), \tag{3}$$

где n, k, m — главное, электрическое и магнитное квантовые числа начального состояния, n', k', m' — главное, электрическое и магнитное квантовые числа конечного состояния; Ψ_{nkm} и $\Psi_{n'k'm'}$ — параболические волновые функции начального и конечного состояний соответственно; ξ, η — параболические координаты, φ — азимутальный угол.

Используя интегральное представление функции Бесселя первого рода с целым порядком s [26],

$$J_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp\{-is\tau + x \sin\tau \, d\tau\},$$

проинтегрируем (3) по азимутальному углу φ:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \exp\left\{ i\Delta m\varphi + q\sqrt{\xi\eta} \, \sin\alpha \, \sin\varphi \right\} = e^{i\Delta m\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi} \exp\left\{ -i\Delta m\varphi' + iq\sqrt{\xi\eta} \, \sin\alpha \, \sin\varphi' \right\} = (-1)^{\Delta m} J_{\Delta m}(x), \tag{4}$$

$$\varphi = \pi - \varphi', \quad \Delta m = m - m', \quad x = q\sqrt{\xi\eta} \, \sin\alpha.$$

Тогда выражение для матричного элемента приобретет вид

$$R(\alpha, q) = (-1)^{\Delta m} \int\limits_0^{\infty} d\xi \int\limits_0^{\infty} d\eta \, \frac{\xi+\eta}{4} \times \Psi^*_{n',k',m'}(\xi, \eta) \exp\left\{ iq \, \frac{\xi-\eta}{2} \, \cos\alpha \right\} \Psi_{n,k,m}(\xi, \eta) \times J_{\Delta m}(q\sqrt{\xi\eta} \sin\alpha), \tag{5}$$

где $\Psi_{n,k,m}(\xi, \eta)$ и $\Psi_{n',k',m'}(\xi, \eta)$ — координатные части параболических волновых функций. Во избежание путаницы следует указать, что маркировка волновых функций с помощью электрического квантового числа k делается для краткости и упрощения записи, поскольку эти функции являются произведением двух волновых функций, зависящих от раз-

ных переменных и параболических квантовых чисел n_1 и n_2 соответственно, а $k = n_1 - n_2$ [25,27]. И именно в терминах параболических квантовых чисел n_1, n_2 проводятся реальные вычисления [25] матричных элементов.

2.2. Обобщение борновского приближения с учетом нормировки вероятности и адиабатического фактора

Как известно, условия применимости первого борновского приближения могут нарушаться, если выражение для вероятности перехода оказывается больше единицы [28, 29]. Этот недостаток принято устранять введением принудительной нормировки выражения для вероятности перехода в борновском приближении [28, 29], для чего необходимо решать трансцендентные уравнения на каждом шаге интегрирования, при представлении эффективного сечения столкновения в виде интеграла по прицельному параметру ρ [28, 29]. Однако в силу эквивалентности квазиклассического и волнового рассмотрений борновского приближения [30] в настоящей работе нормировка достигается новым более простым способом — введением фактора ветвления по переданному импульсу q. При этом нормированная вероятность имеет вид

$$W_{norm}(q) = \frac{W(q)}{1 + W(q)}. \qquad (6)$$

Кроме этого, при малых энергиях стандартные борновские сечения неупругих переходов нарушаются, что приводит, как известно, к резкому возрастанию сечений в области малых скоростей [21, 25, 28, 29]. Корректный учет перехода в область медленных столкновений представляет собой сложную проблему, связанную с решением задачи сильной связи атомных состояний, которая, однако, радикально зависит от числа учитываемых уровней. В данной работе указанная проблема решается на основе метода сильной связи в двухуровневой системе [20], в котором учитывается сильная попарная связь между основным и возбужденным состояниями. Этот метод позволяет перейти к малым скоростям путем умножения выражения $W(q)$ на дополнительный адиабатический фактор. Адиабатический фактор определяется экспонентой с показателем, равным отношению частоты перехода $\omega = \Delta E/\hbar$ к обратному времени столкновений

$$\tau_{col}^{-1} = \frac{v}{\rho_W} \sim \frac{v^2}{n^2}$$

со знаком минус [21], где ρ_W — радиус Вейскопфа.

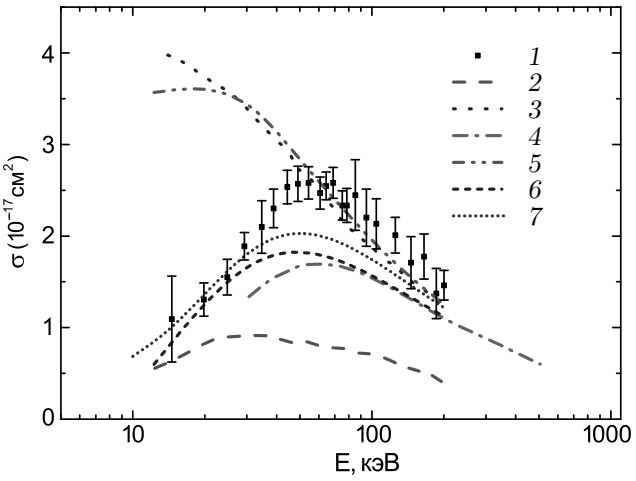

Рис. 2. Суммарное сечение возбуждения уровня с $n = 3$ из основного состояния: *1* — эксперимент [22]; *2* — модель сильной связи, учитывающая 7 состояний [23]; *3* — метод Борна [24]; *4* — метод Глаубера [11]; *5* — метод Борна с нормировкой вероятности (6); *6* — метод Борна с нормировкой вероятности и адиабатическим фактором (7); *7* — расчет по аппроксимационной формуле [33]

В этом случае нормированная вероятность определяется формулой

$$W_{norm}(q) = \frac{W(q)\exp\left\{-\frac{\Delta E n^2}{v^2}\right\}}{1 + W(q)\exp\left\{-\frac{\Delta E n^2}{v^2}\right\}}. \qquad (7)$$

Дальнейшая подстановка (6) и (7) в (1) позволяет получить нормированные эффективные сечения возбуждения, с корректным поведением в области малых энергий столкновения.

Анализ имеющихся литературных данных [11, 22–24] показывает, что даже для атома водорода результаты вычислений сечений возбуждения разными методами сильно отличаются как друг от друга, так и в сравнении с экспериментом [22]. На рис. 2 представлены результаты расчетов сечений возбуждения уровня $n = 3$ из основного состояния в первом борновском приближении [24, 25] (далее для краткости называемого методом Борна), методом сильной связи [23] и методом Глаубера [11, 31, 32]. Приведенные на рисунке сечения (кривые *4–6*) являются суммой парциальных сечений возбуждения перехода по параболическим квантовым числам km. Из представленного сравнения следует, что суммарное сечение, рассчитанное в борновском приближении в параболическом базисе по формуле (6), совпадает с аналогичным суммарным сечением, рассчитанным в сферических координатах [24]. Это условие должно выполняться из общих соображений [25] и является индикатором точности проведенных расчетов. В области малых энергий с экспериментом лучше согла-

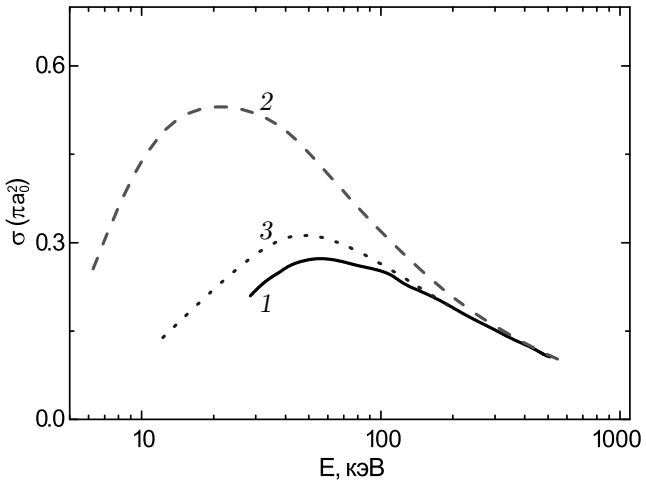

Рис. 3. Эффективные сечения перехода $100 \to 210$: *1* — метод Глаубера [11]; *2* — метод Борна с нормировкой вероятности (6); *3* — метод Борна с нормировкой вероятности и адиабатическим фактором (7)

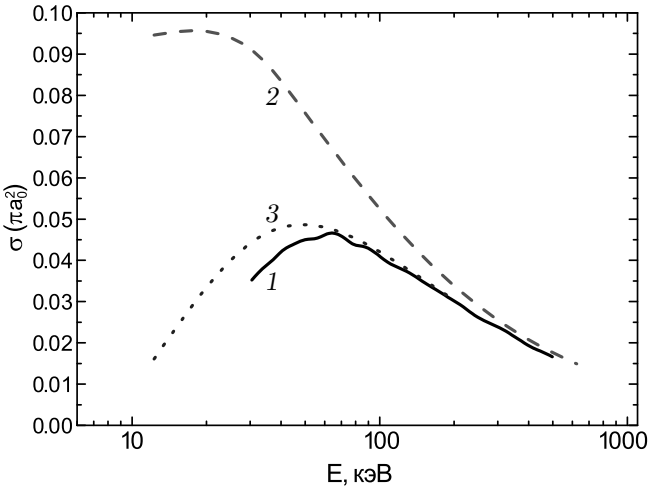

Рис. 4. Эффективные сечения перехода $100 \to 320$: *1* — метод Глаубера [11]; *2* — метод Борна с нормировкой вероятности (6); *3* — метод Борна с нормировкой вероятности и адиабатическим фактором (7)

суются расчеты методом Борна с нормировкой вероятности и с учетом адиабатического фактора (7) и методом Глаубера [11]. При больших энергиях достаточно хорошее согласие с экспериментальными данными показывают как метод Борна, так и метод Глаубера [11]. В то же время суммарное сечение, рассчитанное в модели сильной связи [23], учитывающей 7 состояний, лежит гораздо ниже остальных.

Следует отметить, что расчеты в [11] также проводились в базисе сферических волновых функций (ВФ) $n'l'm'$, но заданных в столкновительной системе координат, с использованием их преобразования поворотом в ВФ nlm, определенные в системе координат, связанной с электрическим полем, и последующего выражения в этой системе параболических ВФ через указанные ВФ nlm. Такое громоздкое преобразование приводит к появлению в выражении для эффективных сечений членов, обусловленных интерференцией амплитуд рассеяния, и значительно усложняет анализ и получение результатов.

Для построения кинетической радиационно-столкновительной модели необходимы расчеты парциальных сечений возбуждения переходов по параболическим квантовым числам. На рис. 3 и 4 представлено сравнение парциальных сечений возбуждения из основного состояния, рассчитанных методом Борна с нормировкой вероятности (6) и с учетом адиабатического фактора (7). Видно, что при учете адиабатического фактора в области малых энергий сечения возбуждения уменьшаются, а при большой энергии сечения приближаются к борновскому пределу.

Кроме эффективных парциальных сечений возбуждения из основного состояния для анализа атомной кинетики в рамках такого же подхода были выполнены численные расчеты парциальных сечений переходов между возбужденными уровнями nkm с разными главными квантовыми числами, а также переходов без изменения главного квантового числа. Как функции энергии эти сечения ведут себя в той или иной мере подобно описанным выше зависимостям, но демонстрируют сильный разброс значений для разных конкретных nkm верхнего и нижнего уровней, который может достигать несколько порядков. При этом, например, сечения переходов между состояниями с главными квантовыми числами, отличающимся на 1, могут быть как одного порядка с сечениями без изменения n, так и отличаться от них на несколько порядков. Поэтому отсутствие результатов расчета таких сечений в литературе и иррегулярность значений сильно усложняют анализ атомной кинетики в nkm-представлении.

3. РАДИАЦИОННО-СТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ КИНЕТИКА ЗАСЕЛЕНИЯ ШТАРКОВСКИХ ПОДУРОВНЕЙ

На основе рассчитанных в базисе параболических волновых функций данных по радиационно-столкновительным процессам была построена кинетическая модель для определения населенностей всех состояний атома водорода в диапазоне главных квантовых чисел $n = 1$–6. Скорости радиационных распадов рассчитывались по формулам Гордона [27]. Сечения возбуждения и девозбуждения в столкновениях с протонами были вычислены в соответствии с процедурой, описанной в разд. 2. Решалась система из 56 линейных алгебраических урав-

нений, определяющая заселение штарковских подуровней N_a:

$$-N_a[N_p\sum_b g_b v\sigma_{ab}(v) + A_a^{Tot} + N_p\sigma_a^{ion}(v)] + \\ + \sum_{b\neq a} N_b[A_{ba} + g_a N_p v\sigma_{ba}(v)] = 0, \\ A_a^{Tot} = \sum_{b<a} A_{ab}, \quad a,b = 1\text{–}56, \quad (8)$$

где a, b — наборы квантовых чисел nkm соответствующего состояния, g_a, g_b — статистический вес состояния, A_{ab} — вероятность радиационного распада, N_p — плотность плазмы, $\sigma_a^{ion}(v)$ — сечение ионизации уровня a [33, 34]. При этом рассматривалось два случая: 1) без ионизации из-за столкновений с протонами ($\sigma_{ion}(v) = 0$); 2) с ионизацией. Для эффективных интегральных сечений ионизации уровней с главным квантовым числом n были использованы аппроксимационные формулы [33,34], которые получены фиттингом результатов расчетов методом Монте-Карло [35]. Поскольку парциальные сечения столкновительной ионизации параболических состояний отсутствуют в литературе, использовались полные сечения ионизации протонами, приведенные в [33,34]. Кинетическая модель была ограничена только состояниями $n = 1$–6, при этом для описания кинетики подуровней с $n = 6$ использовались полные аппроксимационные сечения возбуждения из [33,34]. Такой выбор базиса основан на утверждениях [17–19] о малом влиянии кинетики верхних уровней с $n \geqslant 5$ на населенности штарковских подуровней с $n = 3$, определяющих поляризационные характеристики излучения линии H_α. Кроме того, как видно из проведенных ранее расчетов [17, 18], при плотности плазмы $\sim 10^{13}\,\text{см}^{-3}$ населенности состояний с ростом n резко уменьшаются по величине, а абсолютная амплитуда скачков населенностей разных состояний km в пределах одного n становится очень малой, поэтому использование огрубленного подхода в виде полных сечений ионизации протонами выглядит вполне оправданным в контексте заявленных целей. Кроме того, в предположении стационарности дополнительным условием является равенство суммы относительных населенностей всех уровней 1. На рис. 5 показаны рассчитанные в работе населенности уровней при величине магнитного поля $B = 3\,\text{Тл}$, энергии пучка $E = 50\,\text{кэВ}$ и плотности плазмы $N_p = 3 \cdot 10^{13}\,\text{см}^{-3}$.

Сравнение с данными работы [17] обнаруживает относительно удовлетворительное согласие распределений населенностей в диапазоне $n = 1$–6, если принять во внимание, что в [17] кинетическая схема включала уровни с $n = 1$–10 и решалась система нестационарной кинетики с учетом столкновительной ионизации ионами и перезарядки на нейтральном пучке, а также электрон-атомных столкновений [11]. В работе [17] использовался метод Глаубера для расчета сечений возбуждения с помощью сферических волновых функций nlm с последующим переходом к параболическим квантовым числам. Проведенное сравнение демонстрирует существенное влияние ионизации протонами на распределение населенностей верхних уровней, и в меньшей степени — на распределение населенностей нижних с $n = 2$–3. Кроме того, также продемонстрировано влияние числа учтенных состояний. Показано, что населенности состояний $n = 3$–5, полученные в кинетической модели с $n = 1$–6, лежат ниже населенностей, которые получены с $n = 1$–5. В то же время для состояний уровня с $n = 3$ эта разница относительно мала. Также видно, что результаты нашей работы воспроизводят форму распределения населенностей из работы [17], поскольку в ней также использовались сечения ионизации при столкновениях с протонами и перезарядки из [33], которые не зависят от электрического k и магнитного m квантовых чисел. Имеющиеся отличия могут быть связаны также с тем, что в нашей кинетической модели пренебрегалось вкладом столкновений с электронами по сравнению с протонами.

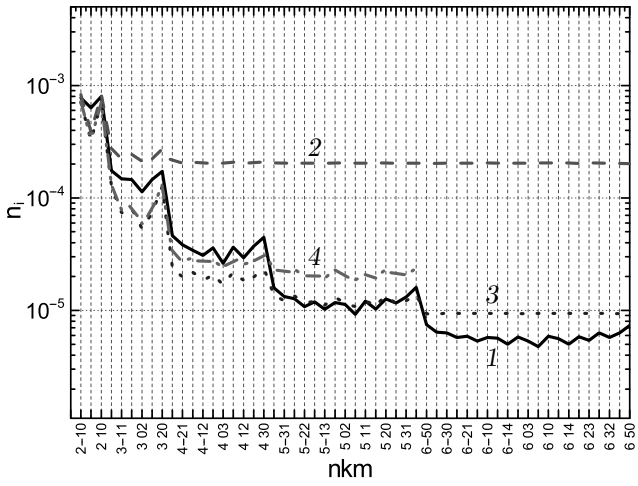

Рис. 5. Расчетные относительные населенности $n_i = N_i/g_i$ штарковских подуровней $i = nkm$, деленные на статистический вес при $B = 3\,\text{Тл}$, $N_p = 3 \cdot 10^{13}\,\text{см}^{-3}$, $E = 50\,\text{кэВ}$: *1* — данные работы [17]; *2* — расчет по кинетической модели без учета ионизации протонами (состояния $n = 1$–6); *3* — расчет по кинетической модели с учетом ионизации протонами (состояния $n = 1$–6); *4* — расчет по кинетической модели с учетом ионизации протонами (состояния $n = 1$–5)

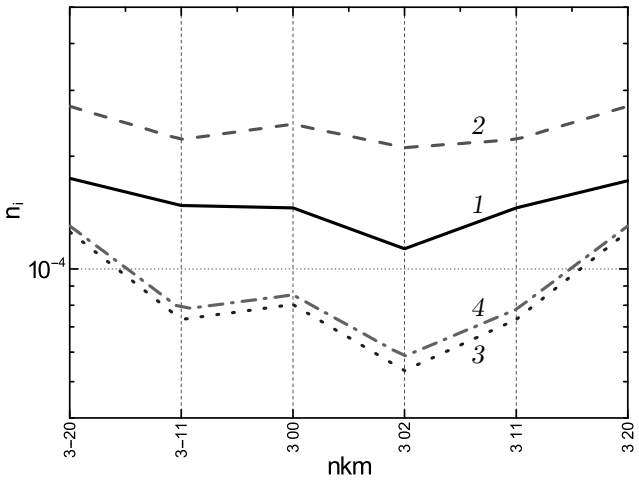

Рис. 6. Расчетные относительные населенности верхних штарковских подуровней линии H_α, деленные на статистический вес $n_i = N_i/g_i$ при $B = 3$ Тл, $N_p = 3 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$, $E = 50$ кэВ. *1* — данные работы [17]; *2* — расчет по кинетической модели без учета ионизации протонами (состояния n = 1–6); *3* — расчет по кинетической модели с учетом ионизации протонами (состояния n = 1–6); *4* — расчет по кинетической модели с учетом ионизации протонами (состояния n = 1–5)

В работе [17] проведен также расчет населенностей с учетом ионизации индуцированным (электродинамическим) электрическим полем, однако этот канал не оказывает существенного влияния на населенности уровней с n = 2–6. Действительно, расчеты по полуэмпирической формуле [36], показывают, что скорость ионизации полем при $E = 100$ кэВ и $B = 5$ Тл для уровней с $n = 5$ ничтожно мала, а для $n = 6$ на 8–10 порядков ниже других каналов распада — радиационного, девозбуждения и ионизации протонами. Этот канал распада необходимо будет включать, если расчеты кинетики будут охватывать также уровни с $n \geqslant 8$.

На рис. 6 в увеличенном масштабе представлены расчетные относительные населенности верхних штарковских подуровней компонент линии H_α. Как видно из этого сравнения, населенности в модели с n = 1–5 мало отличаются от случая n = 1–6. Это находится в соответствии с сопоставлением результатов расчетов с n = 1–10 в [17] и с n = 1–5 в [19]. При этом влияние канала ионизации протонами очень существенно, в то время как в цитируемых работах, с которыми проводилось сравнение, это никак не отмечалось и не анализировалось.

Действительно, как показывает анализ, среднее отклонение в процентах настоящих расчетов населенностей для системы уровней n = 1–6 и условий на рис. 6 от данных [17] без учета ионизации протонами составляет около 1840%, с учетом ионизации — около 39%, а для $n = 3$ — около 62–42%.

В работах [8,11,17–20] справедливо указывалось, что заселение штарковских подуровней атомов диагностического пучка должно быть неравновесным — нетермодинамическим, однако при этом результаты кинетических расчетов никак не анализировались на предмет характера этой неравновесности. Сопоставление скоростных коэффициентов, проведенное нами для условий, представленных на рис. 5, показывает, что скорости возбуждения протонами и скорости переходов между возбужденными уровнями значительно превосходят радиационные константы, что соответствует условиям статистического характера населенностей штарковских подуровней. С другой стороны, ввиду малости разности энергий этой системы квантовых состояний по сравнению с энергией пучка, все сечения возбуждения приблизительно одинаковы, что в конечном итоге приводит к равной населенности всех состояний (кривая *2* на рис. 5). В то же время скорости ионизации протонами при плотности $N_p = 3 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$ намного больше радиационных констант, поэтому населенности в итоге определяются равновесием между процессами возбуждения и ионизации. Скорости ионизации протонами растут заметным образом по мере увеличения n, в то время как скорости возбуждения в среднем приблизительно постоянны, что и приводит к уменьшению населенностей в этом случае с ростом n (см. рис. 5). Как мы видим, подобно данным, приведенным в [17–20], населенности в пределах фиксированного главного квантового числа слегка убывают при уменьшении электрического квантового числа. Это объясняется тем, что сечения возбуждения имеют тенденцию к снижению по мере увеличения магнитного квантового числа верхнего подуровня.

С другой стороны, при малой плотности плазмы следует ожидать реализацию коронального равновесия, когда населенности определяются отношением скорости возбуждения из основного состояния к скорости полного радиационного распада. На рис. 7 показаны результаты расчетов относительных населенностей при энергии пучка $E = 50$ кэВ и плотности плазмы $N_p = 10^{10}$ см$^{-3}$.

Для такой малой плотности скорость ионизации при столкновениях с протонами уже оказывается меньше радиационных констант и существенного вклада в распределение населенностей не вносит. Поскольку при этом скорости возбуждения разных уровней по-прежнему близки по величине, распределение населенностей в зависимости от nkm приобретает характер своеобразных пилообразных коле-

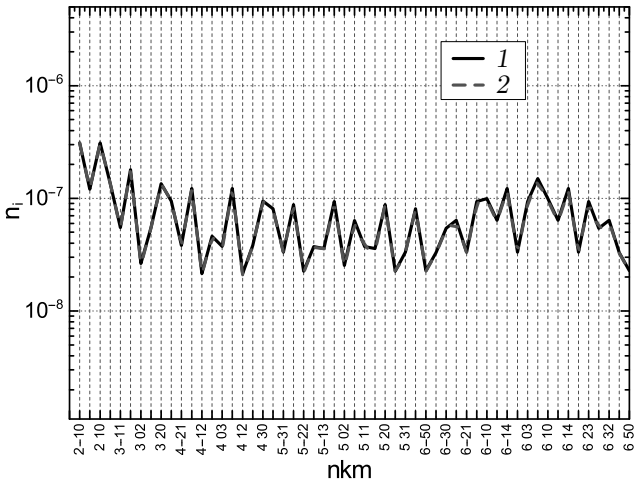

Рис. 7. Расчетные относительные населенности штарковских подуровней линии H_α, деленные на статистический вес $n_i = N_i/g_i$ при $B = 3$ Тл, $N_p = 10^{10}$ см$^{-3}$, $E = 50$ кэВ. *1* — расчет по кинетической модели без учета ионизации протонами (состояния n = 1–6); *2* — расчет по кинетической модели с учетом ионизации протонами (состояния n = 1–6)

баний около некоторого среднего значения по мере чередования отношения статистических весов, принимающих для штарковских подуровней только два значения 1 или 2, что, собственно, и отображено на рис. 7. При этом, несмотря на такое нестандартное поведение населенностей, имеет место корональное равновесие.

4. СИНТЕТИЧЕСКИЙ MSE-СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ ЛИНИИ H_α

В MSE-диагностике, как правило, анализируются поляризационные характеристики эмиссионного спектра штарковского мультиплета линии H_α [1–20]. Абсолютная полная интенсивность I_{3j-2i} некоторой индивидуальной штарковской компоненты $3j \to 2i$ линии H_α определяется стандартным выражением

$$I_{3j-2i} = A_{3j-2i}\hbar\omega_{3j-2i}\frac{N_{3j}}{g_{3j}}, \tag{9}$$

где A_{3j-2i} — вероятность радиационного распада с подуровня $3j$ на подуровень $2i$, $\hbar\omega_{3j-2i}$ — энергия между уровнями, N_{3j}, g_{3j} — населенность и статистический вес состояния $3j$ [27], а цифры в нижних индексах равны значениям главных квантовых чисел соответствующих уровней. Для расчета интенсивностей компонент линии решается стационарная система кинетических уравнений для населенностей штарковских подуровней верхнего уровня $3j$ с учетом его связи с другими уровнями. Как указывалось выше, в работе используются эффективные сечения столкновительных переходов, рассчитанные методом Борна с нормировкой вероятности и адиабатическим фактором (см. разд. 2). В статистическом пределе [27] — большой плотности — считается, что заселение уровней происходит пропорционально их статистическому весу, а интенсивность I^{St}_{3j-2i} определяется выражением

$$I^{St}_{3j-2i} \sim A_{3j-2i}\hbar\omega_{3j-2i}, \tag{10}$$

так что населенности разных штарковских подуровней одинаковы! Однако, как показывают детальные кинетические расчеты в неравновесной системе плазма + пучок нейтральных атомов с энергией, много большей температуры плазмы, наблюдается разница населенностей штарковских подуровней даже при очень большой плотности плазмы.

В динамическом пределе [27] — малой плотности — населенности уровней определяются соотношением между возбуждением из основного состояния и полной вероятностью радиационного распада A^{Tot}_{3j}, а интенсивность компоненты $3j$ в динамическом пределе I^{Dyn}_{3j} для системы уровней $n = 1-6$ определяется выражением

$$I^{Dyn}_{3j} = A_{3j-2i}\hbar\omega_{3j-2i}\frac{N_p v}{A^{Tot}_{3j}}\left[\sigma_{1-3j} + \right.$$
$$+\sum_a \frac{A_{4a-3j}\sigma_{1-4a}}{A^{Tot}_{4a}} + \sum_b \frac{A_{5b-3j}\sigma_{1-5b}}{A^{Tot}_{5b}} +$$
$$\left. +\sum_c \frac{A_{6c-3j}\sigma_{1-6c}}{A^{Tot}_{6c}}\right]. \tag{11}$$

Здесь $\sigma_{1-nj,a,b,c}$ — сечения возбуждения из основного состояния на уровень с главным квантовым числом n и набором электрического и магнитного квантовых чисел km (j — для $n = 3$, a — для $n = 4$, b — для $n = 5$, c — для $n = 6$) с учетом адиабатического фактора, $A_{na,b,c-3j}$ — вероятность радиационного распада с уровня $n = 4, 5, 6$ на уровень $3j$, $A^{Tot}_{na,b,c}$ — полная вероятность радиационного распада, N_p — плотность плазмы, v — скорость пучка.

На рис. 8–10 представлены синтетические спектры линии H_α с длиной волны 656 нм, соответствующие различным параметрам плазмы и пучка. Все относительные интенсивности нормированы на соответствующую расчетную величину интенсивности центральной компоненты линии. Для понимания соотношения между кинетическим и статистическим распределениями интенсивностей во врезках приведены константы увеличения или уменьшения значений в случае нормировки кинетических распределений на значение статистической интенсивности цен-

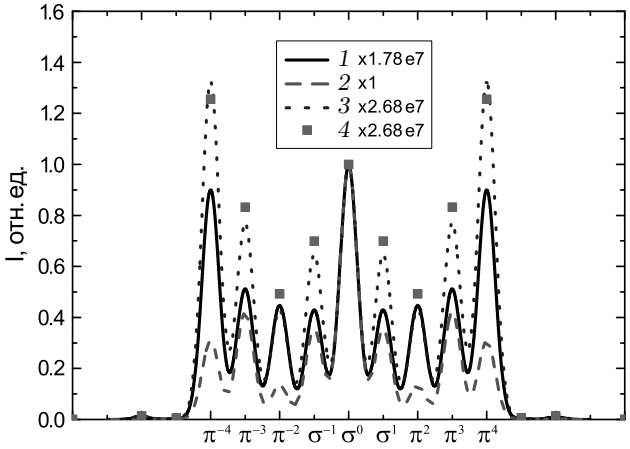

Рис. 8. Синтетический MSE-спектр излучения линии H_α в относительных единицах для $B = 5$ Тл, $N_p = 10^{10}$ см$^{-3}$, $E = 100$ кэВ: *1* — расчет методом Борна с нормировкой вероятности и адиабатическим фактором (9) с учетом ионизации; *2* — статистическое распределение населенностей (10); *3* — распределение населенностей в динамическом пределе (11); *4* — расчет из работы [19] методом Глаубера

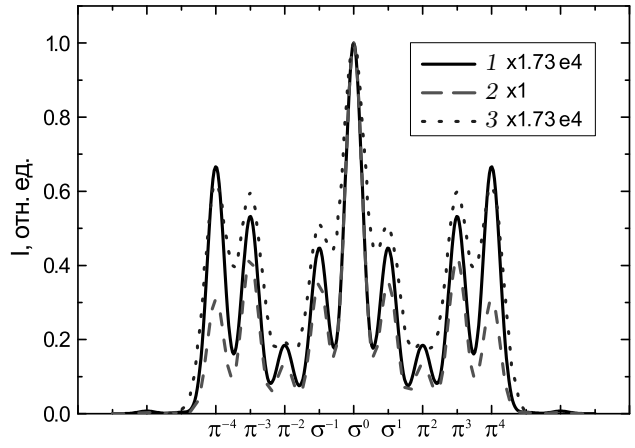

Рис. 9. Синтетический MSE-спектр излучения линии H_α в относительных единицах для $B = 3$ Тл, $N_p = 10^{13}$ см$^{-3}$, $E = 50$ кэВ: *1* — метод Борна с нормировкой вероятности и адиабатическим фактором (9) с учетом ионизации; *2* — статистическое распределение населенностей (10); *3* — расчет из работы [10] методом Глаубера

тральной компоненты. На оси абсцисс π^d или σ^d обозначают относительное положение центра сублиний отдельных штарковских компонент в соответствии с их поляризацией (π или σ) и относительным расщеплением $d = (3k_j - 2k_i)$ (в единицах $(3/2)F$) от положения центральной компоненты линии. Для демонстрации синтетического спектра выбран гауссовский профиль штарковских компонент с одинаковой полушириной $\delta = 0.25$ в тех же относительных единицах оси абсцисс на рис. 8. Величина полуширины выбрана исключительно в целях наглядного отображения спектра линии.

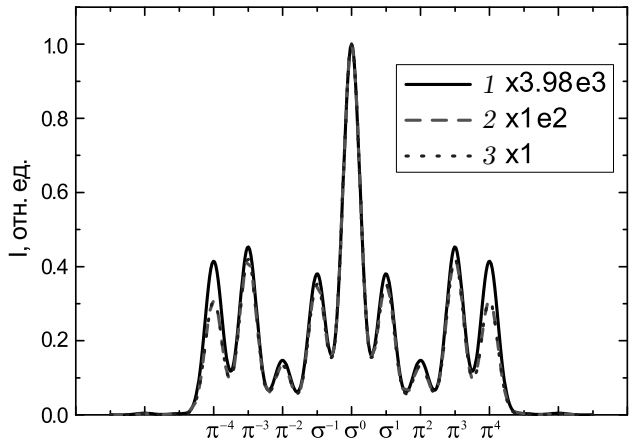

Рис. 10. Синтетический MSE-спектр излучения линии H_α в относительных единицах для $B = 3$ Тл, $N_p = 10^{16}$ см$^{-3}$, $E = 50$ кэВ: *1* — расчет методом Борна с нормировкой вероятности, адиабатическим фактором (9) и с учетом ионизации; *2* — расчет методом Борна с нормировкой вероятности и адиабатическим фактором (9) без учета ионизации; *3* — статистическое распределение населенностей (10)

Для расчета населенностей использовалась кинетическая модель, учитывающая ионизацию водорода при столкновении с протонами [32] в предположении наблюдения в направлении, перпендикулярном скорости пучка.

Из сопоставления (10) и (11) следует, что статистические населенности всегда больше динамического предела и соответственно результатов кинетического расчета при малой плотности, но при большой плотности это соотношение неочевидно. Это подтверждается результатами расчетов синтетического спектра H_α с помощью описанной выше кинетической модели, которые представлены на рис. 8. В то же время рис. 8–10 имеют в основном демонстрационный характер, так как соответствующие расчеты были выполнены, чтобы выявить характер изменения синтетического спектра в зависимости от величины магнитного поля, плотности плазмы и энергии пучка. Например, для таких больших значений магнитного поля, как на рис. 8, уже необходимо учитывать квадратичный эффект Зеемана и упрощенное представление о MSE здесь неприменимо [37].

Из рис. 8–10 видно, как реализуется корональное приближение при малой плотности плазмы и статистический предел в плотной плазме. По мере увеличения плотности на рис. 9, 10 отличие синтетических интенсивностей, полученных из расчетов полной кинетики с учетом ионизации протонами, от статистических уменьшается. Кроме того, на рис. 10 заметно, что учет ионизации отклоняет отношение интенсивностей от статистического предела, что свидетельствует об изменении характера равновесия.

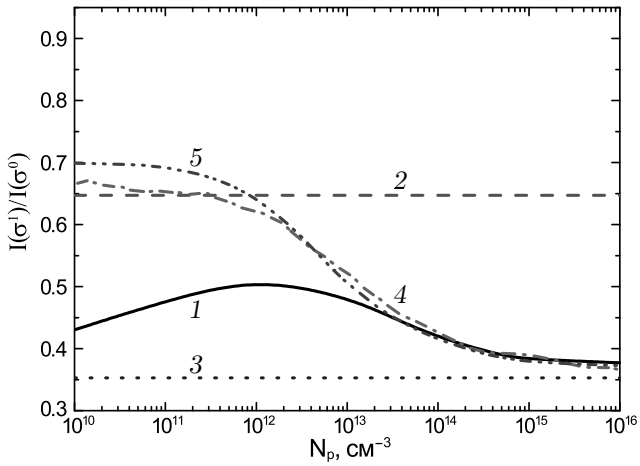

Рис. 11. Отношение интенсивностей $I(\sigma^1)/I(\sigma^0)$ линии H_α в зависимости от плотности плазмы ($B = 5$ Тл, $E = 100$ кэВ): *1* — расчетные данные по (9) с учетом ионизации; *2* — динамический предел (11); *3* — статистический предел (10); *4* — данные [17]; *5* — данные работы [19]

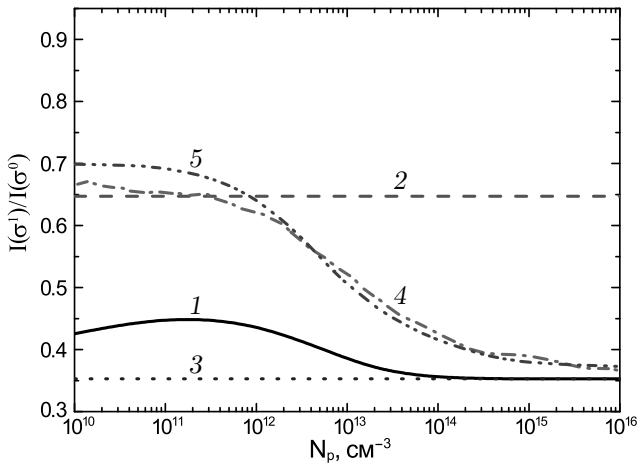

Рис. 12. Отношение интенсивностей $I(\sigma^1)/I(\sigma^0)$ линии H_α в зависимости от плотности плазмы ($B = 5$ Тл, $E = 100$ кэВ): *1* — расчетные данные по (9); *2* — динамический предел (11); *3* — статистический предел (10); *4* — данные [17]; *5* — данные работы [19]

Проведенное сопоставление относительных интенсивностей на рис. 8–10, нормированных на соответствующее значение интенсивности центральной компоненты, демонстрирует хорошее согласие с результатами других авторов.

Результаты этого анализа показывают, что и при малых, и при больших плотностях «кинетические» населенности в системе нейтральный энергичный пучок – плазма много меньше статистических и носят неравновесный нетермодинамический характер.

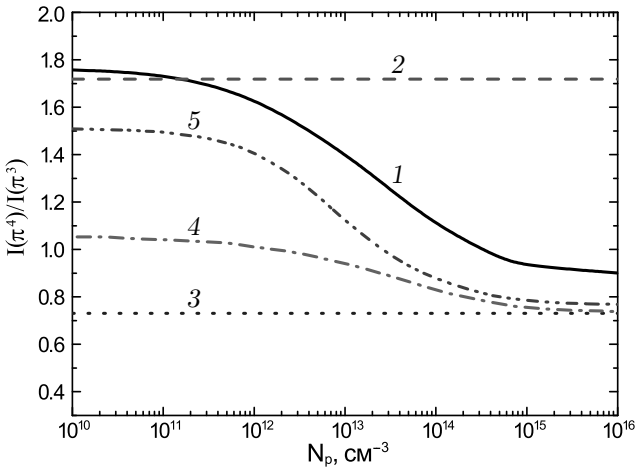

Рис. 13. Отношение интенсивностей $I(\pi^4))/I(\pi^3)$ линии H_α в зависимости от плотности плазмы ($B = 5$ Тл, $E = 100$ кэВ): *1* — расчетные данные (9) с учетом ионизации; *2* — динамический предел (11); *3* — статистический предел (10); *4* — данные [17]; *5* — данные работы [19]

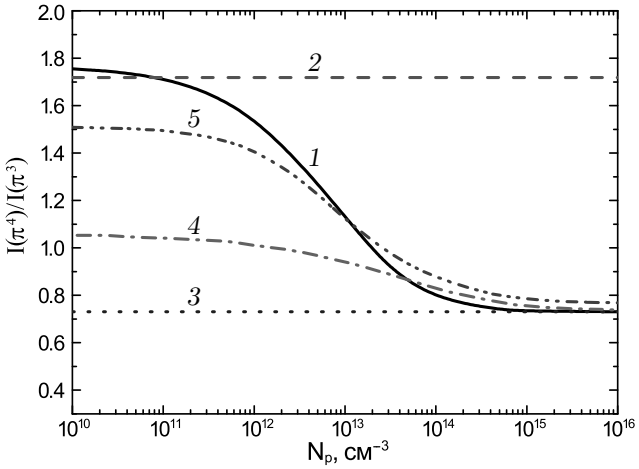

Рис. 14. Отношение интенсивностей $I(\pi^4)/I(\pi^3)$ линии H_α в зависимости от плотности плазмы ($B = 5$ Тл, $E = 100$ кэВ): *1* — расчетные данные по (9) без учета ионизации; *2* — динамический предел (11); *3* — статистический предел (10); *4* — данные [17]; *5* — данные работы [19]

5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ОТНОШЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ

На рис. 11–16 представлены отношения интенсивностей некоторых компонент линии H_α как функции плотности плазмы. Из рисунков видно, что при малых плотностях плазмы реализуется корональное равновесие, и отношение интенсивностей близко к динамическому пределу, а в пределе больших плотностей отношение интенсивностей приближается к статистическому пределу. Отклонение от

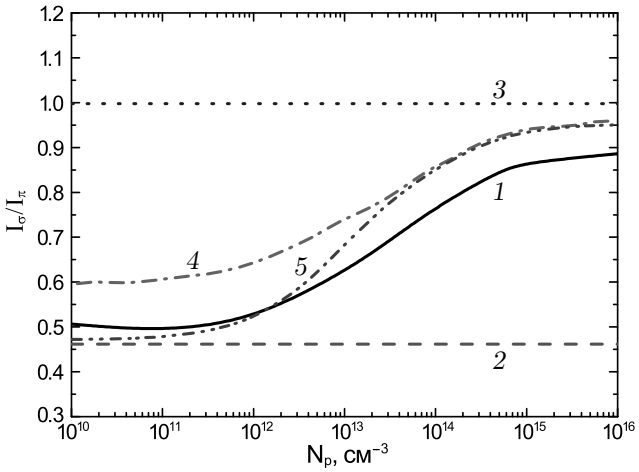

Рис. 15. Отношение суммы интенсивностей σ-компонент I_σ, деленной на статистический вес равный 2 из-за двух независимых поляризаций, к сумме интенсивностей π-компонент I_π линии H_α в зависимости от плотности плазмы ($B = 5$ Тл, $E = 100$ кэВ): *1* — расчетные данные по (9) с учетом ионизации; *2* — динамический предел (11); *3* — статистический предел (10); *4* — данные [17]; *5* — данные работы [19]

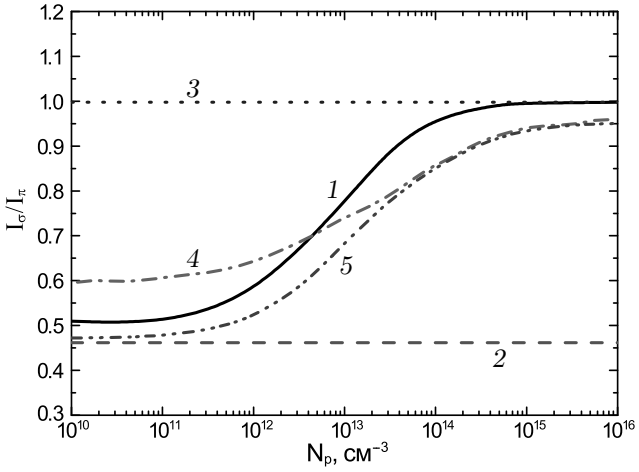

Рис. 16. Отношение суммы интенсивностей σ-компонент I_σ, деленной на статистический вес равный 2 из-за двух независимых поляризаций, к сумме интенсивностей π-компонент I_π линии H_α в зависимости от плотности плазмы ($B = 5$ Тл, $E = 100$ кэВ): *1* — расчетные данные по (9) без учета ионизации; *2* — динамический предел (11); *3* — статистический предел (10); *4* — данные [17]; *5* — данные работы [19]

него связано с ионизацией атомов пучка при столкновениях с протонами плазмы. Проведено сравнение с результатами работ [17] и [19], в которых для расчета сечений возбуждения использовались сферические волновые функции с последующим переходом в параболический базис, а сами сечения вычислялись методом Глаубера. В работе [17] в кинетической модели рассматривались состояния вплоть до $n = 10$, в то время как в [19] расчеты были ограничены состояниями с $n = 5$. Можно заметить влияние отношения интенсивностей компонент от числа учтенных состояний.

6. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ MSE-СПЕКТРОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

В случае, если конструкционные особенности установки позволяют осуществить наблюдение по направлению, перпендикулярному скорости пучка, линия наблюдения образует угол θ с направлением электрического поля. Тогда вектор колебаний электрического поля электромагнитной волны (ЭМВ) излучения будет составлять угол $\pi/2-\theta$ с направлением электрического поля. Вектор колебаний излучения π-компонент вдоль электрического поля будет иметь проекцию на вектор поляризации ЭМВ, пропорциональный $\cos(\pi/2-\theta) = \sin\theta$. В то же время вектор колебаний σ-компонент в плоскости, перпендикулярной скорости, будет составлять с вектором поляризации ЭМВ угол θ и давать вклад в интенсивность $I_\sigma \cos^2\theta$, где I_σ обозначает половину суммарной интенсивности σ-компонент линии. Также σ-компоненты будут давать вклад в поляризацию ЭМВ, перпендикулярную плоскости, образованной вектором электрического поля и направлением наблюдения, и направленную вдоль скорости с интенсивностью, равной I_σ. Тогда степень поляризации излучения относительно направления скорости при таком наблюдении можно выразить в виде

$$P = \frac{I_\parallel - I_\perp}{I_\parallel + I_\perp} = \frac{I_\pi \sin^2\theta + I_\sigma \cos^2\theta - I_\sigma}{I_\pi \sin^2\theta + I_\sigma(\cos^2\theta + 1)} = \\ = \frac{(I_\pi - I_\sigma)\sin^2\theta}{I_\pi \sin^2\theta + I_\sigma(\cos^2\theta + 1)}. \quad (12)$$

Важно отметить, что в пределе больших плотностей и в отсутствие ионизации степень поляризации стремится к нулю при любом угле наблюдения в статистическом пределе. На рис. 17 приведены зависимости степени поляризации излучения линии H_α от угла θ при различных плотностях плазмы, полученные в рамках настоящей кинетической модели без учета ионизации протонами.

Как видно на рис. 17, при увеличении плотности плазмы степень поляризации линии H_α стремится к нулю при любом значении угла θ. При этом, как отмечалось в разд. 3, учет ионизации нарушает статистический предел, и поэтому даже при большой плотности степень поляризации не стремится

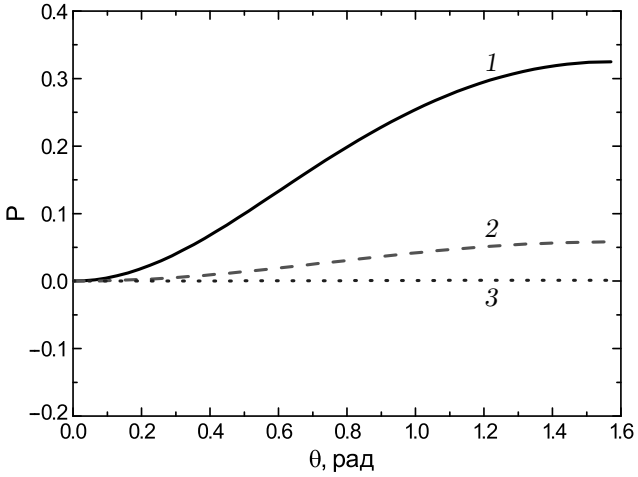

Рис. 17. Степень поляризации линии H_α без учета влияния ионизации в зависимости от угла θ ($B = 5$ Тл, $E = 100$ кэВ) при разных значениях плотности плазмы N_e [см$^{-3}$]: *1* — 10^{10}; *2* — $3 \cdot 10^{13}$; *3* — 10^{16}

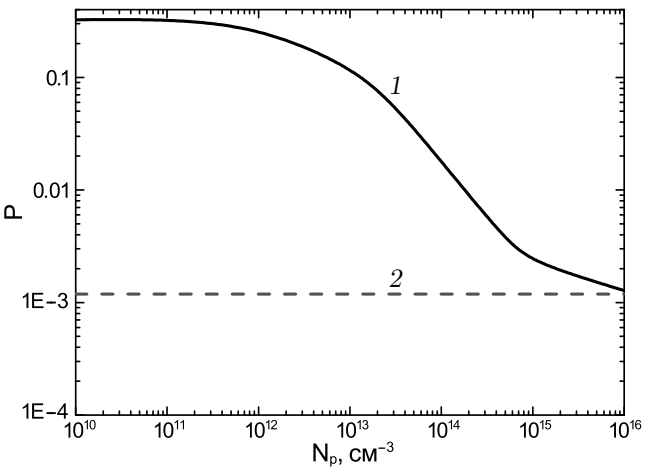

Рис. 19. Степень поляризации линии H_α при $B = 5$ Тл, $E = 100$ кэВ, $\theta = 90°$: *1* — без учета влияния ионизации в зависимости от плотности плазмы; *2* — статистический предел в этих условиях

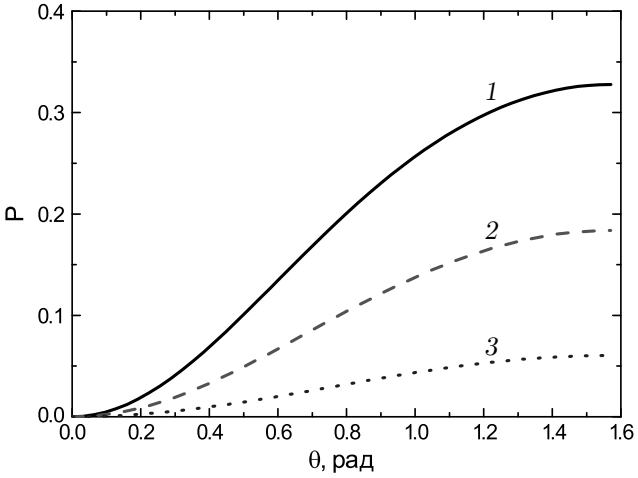

Рис. 18. Степень поляризации линии H_α с учетом влияния ионизации в зависимости от угла θ ($B = 5$ Тл, $E = 100$ кэВ) при разных значениях плотности плазмы N_e [см$^{-3}$]: *1* — 10^{10}; *2* — $3 \cdot 10^{13}$; *3* — 10^{16}

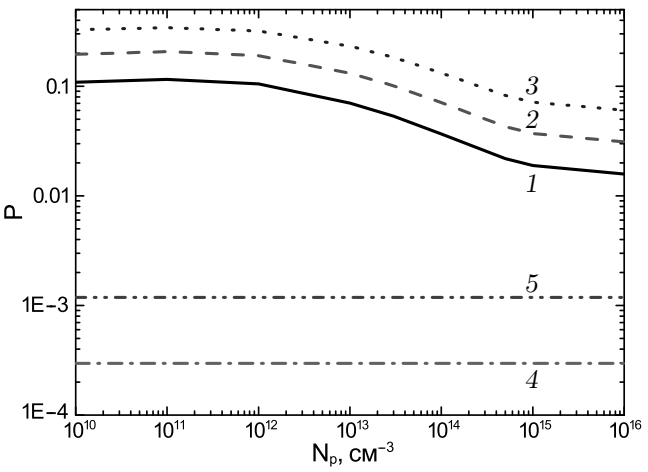

Рис. 20. Степень поляризации линии H_α с учетом влияния ионизации в зависимости от плотности плазмы при различных углах ($B = 5$ Тл, $E = 100$ кэВ): *1* — $\theta = 30°$; *2* — $\theta = 45°$; *3* — $\theta = 90°$; *4* — статистический предел при $\theta = 90°$; *5* — статистический предел при $\theta = 30°$

к нулю, как это видно на рис. 18. Также интересно проследить за поведением степени поляризации при фиксированном угле наблюдения в зависимости от плотности плазмы. Такие зависимости приведены на рис. 19 и 20.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование поляризационных характеристик эмиссионного спектра штарковских компонент линии H_α в условиях наблюдения перпендикулярно направлению диагностического пучка нейтралов для MSE-диагностики, инжектируемого поперек магнитного поля установки. Для получения синтетического спектра развит метод расчета эффективных сечений возбуждения переходов между штарковскими подуровнями водородоподобного атома при столкновениях с протонами, основанный на методе Борна с нормированной вероятностью перехода и адиабатическим фактором, обеспечивающим более корректное поведение эффективных сечений в области малых энергий столкновения, когда формально применимость метода Борна нарушается. Расчеты проведены в базисе параболических волновых функций с осью квантования вдоль направления электродинамического электрического поля в системе координат покоя диагностического пучка. Как и в методе Глаубера [11, 31, 32], при этом учитывается, что в этой

области энергий столкновений тяжелых частиц [11], характерной для пучков нейтралов MSE-диагностики, эффективный передаваемый импульс перпендикулярен направлению скорости пучка. Создана кинетическая радиационно-столкновительная модель расчета населенностей штарковских подуровней водородного атома в базисе параболических волновых функций с квантовыми числами n_1n_2m, охватывающая все состояния с главным квантовым числом n в интервале 1–6. Проведены расчеты населенностей штарковских подуровней для $n = 1$–6 с учетом и без учета процесса столкновительной ионизации протонами и на их основе рассчитаны синтетические эмиссионные спектры интенсивности штарковских компонент линии H_α для разных параметров плазмы и диагностического пучка. Показано, что при малой плотности плазмы распределение населенностей по штарковским подуровням соответствует корональному равновесию. При повышении плотности плазмы сохраняется нетермодинамический характер равновесия, при котором населенности штарковских подуровней определяются в основном процессами возбуждения и ионизации при столкновениях с протонами. Таким образом, в отличие от предыдущих исследований проанализированы и найдены причины нетермодинамического характера населенностей штарковских подуровней нейтральных атомов энергичного пучка в термоядерной плазме с магнитным удержанием. Исследовано поведение отношения интенсивностей отдельных штарковских компонент в зависимости от плотности плазмы и параметров диагностического пучка в пределах статистического и динамического заселения уровней. Прослежены зависимости поляризационной характеристики линии H_α от плотности плазмы и углов наблюдения относительно направления индуцированного электрического поля поперек скорости пучка. Выявлено изменение статистического предела поляризационной характеристики под влиянием процесса ионизации протонами для разных углов наблюдения относительно направления индуцированного электрического поля. Все стадии исследования сопровождаются сравнением с литературными данными, которое демонстрирует разумное соответствие с результатами настоящей работы.

Необходимо подчеркнуть, что предыдущие расчеты [17, 19], выполненные с помощью сечений, рассчитанных в nlm-базисе сферических волновых функций, в основном были нацелены на использование уже имеющихся данных, хотя верифицированной базы сечений возбуждения водородных уровней до сих пор не существует. Представленный и использованный в настоящей работе весь набор сечений и скоростных коэффициентов рассчитан численно универсальным образом в параболическом базисе волновых функций впервые в соответствии с физической постановкой задачи. При этом хотя и наблюдается некоторое отличие кинетических расчетов, относительное и качественное их поведение демонстрирует подобие, что в целом подтверждает достоверность и надежность результатов настоящей работы.

Полученные результаты представляют общефизический интерес и могут быть использованы для планирования и интерпретации экспериментальных измерений, ориентированных на определение профиля наклона магнитной силовой линии [1–7], который, в свою очередь, позволяет установить пространственные распределения абсолютных величин параметров разряда [3], например, таких как коэффициент запаса устойчивости шнура [3], разрядный ток [1–7] и профиль плотности тока в разряде токамака [1–7].

Благодарности. Авторы выражают признательность за полезные обсуждения В. А. Крупину, А. Б. Кукушкину, В. А. Неверову, И. А. Земцову, М. Р. Нургалиеву и Е. Стамбульчику, а также А. Ю. Летунову за деятельное участие на начальном этапе работы.

Финансирование. Данная работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт».

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu. I. Galushkin, Soviet Astronomy AJ **14**, 301 (1970).

2. F. M. Levinton, R. J. Fonck, G. M. Gammel et al., Phys. Rev. Lett. **63**, 2060 (1989).

3. В. А. Крупин, С. Н. Иванов, А. А. Медведев и др., Препринт ИАЭ–5940/7 (1995).

4. H. Y.-H. Yuh, PhD Thesis, MIT, Cambridge (2005).

5. R. Reimer, PhD Thesis, Universitat Greifswald, Greifswald (2016).

6. A. Thorman, PhD Thesis, The Australian National University, Canberra (2018).

7. F. M. Levinton and H. Yuh, Rev. Sci. Instrum. **79**, 10F522 (2008).

8. M. F. Gu, C. T. Holcomb, R. J. Jayakuma et al., J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **41**, 095701 (2008).

9. W. Mandl, R. C. Wolf, M. G. von Hellermann et al., Plasma Phys. Control. Fusion **35**, 1373 (1993).

10. N. A. Pablant, K. H. Burrell, R. J. Groebner et al., Rev. Sci. Instrum. **79**, 10F517 (2008).

11. O. Marchuk, Yu. Ralchenko, R. K. Janev et al., J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **43**, 011002 (2010).

12. R. Reimer, A. Dinklage, J. Geiger et al., ASDEX Upgrade and Wendelstein 7-X Teams, Contrib. Plasma Phys. **50**, 731 (2010).

13. E. Delabie, M. Brix, C. Giroud et al., Plasma Phys. Control. Fusion **52** 125008 (2010).

14. A. Dinklage, R. Reimer, R. Wolf, Wendelstein 7-X Team, M. Reich, and ASDEX Upgrade Team, Fusion Sci. Technol. **59**, 406 (2011).

15. R. Reimer, A. Dinklage, R. Fischer et al., and ASDEX Upgrade, Rev. Sci. Instrum. **84**, 113503 (2013).

16. R. C. Wolf, A. Bock, O. P. Ford et al., J. Instrum. **10**, P1008 (2015).

17. Yu. Ralchenko, O. Marchuk, W. Biel et al., Rev. Sci. Instrum. **83**, 10D504 (2012).

18. O. Marchuk, Yu. Ralchenko, and D. R. Schultz, Plasma Phys. Control. Fusion **54**, 095010 (2012).

19. M. von Hellermann, M. de Bock, O. Marchuk et al., Atoms **7**, 30 (2019).

20. O. Marchuk, D. R. Schultz, and Yu. Ralchenko, Atoms **8**, 8 (2020).

21. И. И. Собельман, *Введение в теорию атомных спектров*, ГИФМЛ, Москва (1963).

22. J. T. Park, J. E. Aldag, J. M. George et al., Phys. Rev. A **14**, 608 (1976).

23. D. Rapp and D. Dinwiddie, *Convergence of the Hydrogenic Expansion in H^+–H Scattering*, J. Chem. Phys. **57**, 4919 (1972).

24. D. R. Bates and G. Griffing, Proc. Phys. Soc. A London **66**, 64 (1953).

25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, т. III, Физматлит, Москва (2002).

26. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).

27. Г. Бете, Э. Солпитер, *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, ГИФМЛ, Москва (1960).

28. I.Y. Skobelev and A.V. Vinogradov, J. Phys. B: Atom. Mol. Phys. **11**, 2899 (1978).

29. А. В. Виноградов, И. Ю. Скобелев, А. М. Урнов и др., Труды ФИАН **119**, 120 (1980).

30. А. В. Виноградов, Труды ФИАН **51**, 44 (1970).

31. R. J. Glauber, *High Energy Collision Theory*, in *Lectures in Theoretical Physics*, Vol. 1, Interscience, New York (1959), p. 315.

32. V. Franco and B. K. Thomas, Phys. Rev. A **4**, 945 (1971).

33. R. K. Janev, D. Reiter, and U. Samm, *Collision Processes in Low-Temperature Hydrogen Plasmas*, Forschungszentrum Jülich (2003).

34. R. K. Janev and J. J. Smith, *Cross Sections for Collisions Processes of Hydrogen Atoms with Electrons, Protons and Multiply Charged Ions*, Suppl. Nucl. Fusion 4, IAEA, Vienna (1993).

35. R. E. Olson, J. Phys. B **13**, 483 (1980).

36. R. J. Damburg and V. V. Kolosov, J. Phys. B: Atom. Mol. Phys. **12**, 2637 (1979).

37. P. A. Braun and E. A. Solov'ev, J. Phys. B: Atom. Mol. Phys. **17**, L211 (1984).