

ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НА ОТКРЫТОМ КОНЦЕ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

*С. Н. Галямин**

*Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 12 октября 2023 г.,
после переработки 7 ноября 2023 г.
Принята к публикации 8 ноября 2023 г.

Представлено аналитическое решение канонической задачи дифракционного излучения равномерно движущегося точечного заряда на открытом конце круглого волновода со сплошным диэлектрическим заполнением. Рассмотрен случай движения вдоль оси. При решении использован модифицированный метод шивания, приводящий к уравнению Винера–Хопфа–Фока, а после его формального решения — к бесконечной линейной системе уравнений на коэффициенты возбуждения волноводных мод. Данная система решается численно методом редукции с любой заданной точностью. Численные результаты получены для случая вылета заряда из волновода.

DOI: 10.31857/S0044451024030039

1. ВВЕДЕНИЕ

Под дифракционным обычно понимают излучение, которое генерируется равномерно движущимся точечным зарядом (или иным источником) на различных неоднородностях и при этом не может быть сведено к переходному излучению или излучению Вавилова–Черенкова [1]. От классических задач дифракции (наиболее характерными из которых являются, например, дифракция плоской волны на полуплоскости, круглом отверстии в проводящем экране или клине, а также излучение волноводной моды из открытого конца волновода) данная задача отличается не математической сутью, а лишь специфическим видом источника, который взаимодействует с неоднородностью своим кулоновским полем (последнее может быть разложено по убывающим от траектории заряда плоским волнам). Однако исторически ситуация сложилась таким образом, что несмотря на общность задач и методов решения, теория дифракционного излучения (ДИ) развивалась достаточно изолированно от теории дифракции, особенно в последние десятилетия, поэтому ряд важных дифракционных задач с движущимся источником не был рассмотрен до сих пор.

Основы теории ДИ изложены, например, в фундаментальных обзорах [1, 2], где рассматривались идеально проводящие неоднородности в вакууме. В работе [1] изложена теория ДИ для ряда двумерных задач, имеющих строгое решение, работа [2] посвящена развитию скалярной теории ДИ. Также следует упомянуть ряд работ, где рассматривались волноводные задачи [3–5] и развивались иные методы расчета ДИ от сложных неоднородностей [6–9].

Однако в последние годы существенно возросла важность теории ДИ при наличии диэлектрических неоднородностей. В определенном смысле все началось с излучения Вавилова–Черенкова в волноводах со слоистым заполнением, которое на протяжении последних десятилетий успешно используется в методе «кильватерного ускорения» заряженных частиц [10–16]. Типично применяемой структурой является так

* E-mail: s.galyamin@spbu.ru

называемый «капилляр», т. е. диэлектрическая трубка с осесимметричным вакуумным каналом (для пропускания заряженных частиц) и металлическим напылением снаружи. Те же капилляры, которые используются в рамках кильватерного ускорения, а также аналогичные, но более многослойные структуры, было предложено использовать и для генерации узкополосного излучения (в том числе и в терагерцовом диапазоне) [9, 17–20]. При этом возникает важный вопрос эффективного вывода сгенерированного излучения из волновода в открытое пространство, который, будучи сформулирован математически, приводит к семейству задач теории ДИ на открытом конце волновода с диэлектрическим заполнением.

Как известно из теории дифракции на аналогичных структурах, наличие диэлектрика существенно усложняет задачу: например, возникают бесконечные линейные [21–24] или нелинейные [25, 26] системы, а решение не строится в замкнутом виде. Возможно по этой причине до настоящего времени в литературе отсутствует строгое решение ряда классических задач ДИ с диэлектрической неоднородностью вышеописанного типа (за исключением ряда работ автора данной статьи [26, 27], где, однако, рассматривалась «закрытая» геометрия), в то время как аналогичные вакуумные структуры были с различных сторон проанализированы [3–5].

Настоящая работа посвящена изложению строгого аналитического подхода для анализа ДИ на открытом конце круглого волновода со слоистым диэлектрическим заполнением, что устраняет отмеченный пробел в теории ДИ (для наглядности изложения рассмотрен простейший случай сплошного заполнения). Идея данного метода (на примере дифракции волноводной моды) представлена в статьях [21, 22] для плоскопараллельной геометрии, а для цилиндрической геометрии этот метод развивался в наших недавних работах [28, 29], хотя некоторые его элементы содержатся также и в статье [30].

Наконец, следует отметить, что с точки зрения терминологии в данном случае вероятно правильнее было бы говорить не только о ДИ, но о совокупности ДИ и переходного излучения. Однако рассматриваемая задача и по постановке, и по методам решения наиболее близка к теории дифракции, поэтому мы не упоминаем переходное излучение ни в названии, ни во Введении, но затронем этот вопрос при обсуждении аналитических результатов.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЕ

Задачу будем решать для амплитуд фурье-гармоник искомым полем (фактически — в гармоническом режиме), т. е. предполагаем, что компоненты поля разложены в интеграл Фурье вида

$$H_{\varphi} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\varphi\omega} e^{-i\omega t} d\omega = 2\text{Re} \int_0^{+\infty} H_{\varphi\omega} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1)$$

и необходимо найти $H_{\varphi\omega}$ и аналогичные амплитуды остальных компонент (используется цилиндрическая система координат ρ, φ, z). Благодаря второму равенству в (1) достаточно считать, что $\omega > 0$. Рассматривается полубесконечный круглый волновод радиуса a в вакууме, заполненный диэлектриком с $\varepsilon > 1$ (рис. 1). По оси волновода равномерно со скоростью $v = c\beta$ (c — скорость света в вакууме) движется точечный заряд q . Для определенности будем считать, что черенковское условие выполнено, т. е. $\varepsilon\beta^2 > 1$, однако на структуре общего решения это предположение никак не сказывается.

Задача осесимметричная, поэтому вне источника остальные ненулевые компоненты поля выражаются следующим образом:

$$E_{\rho\omega} = \frac{1}{ik_0\varepsilon} \frac{\partial H_{\varphi\omega}}{\partial z}, \quad E_{z\omega} = \frac{i}{k_0\varepsilon\rho} \left(H_{\varphi\omega} + \rho \frac{\partial H_{\varphi\omega}}{\partial \rho} \right), \quad (2)$$

где $k_0 = \omega/c + i\delta$ ($\delta \rightarrow +0$, т. е. предполагается наличие малой положительной мнимой части у k_0 , которое можно трактовать как введение малого затухания в вакуум).

Падающее поле внутри волновода ($\rho < a, z < 0$) имеет вид

$$H_{\varphi\omega}^{(i)} = \frac{iqs}{2c} e^{i\frac{\omega}{v}z} \left[H_1^{(1)}(\rho s) - \frac{H_0^{(1)}(as)}{J_0(as)} J_1(\rho s) \right], \quad (3)$$

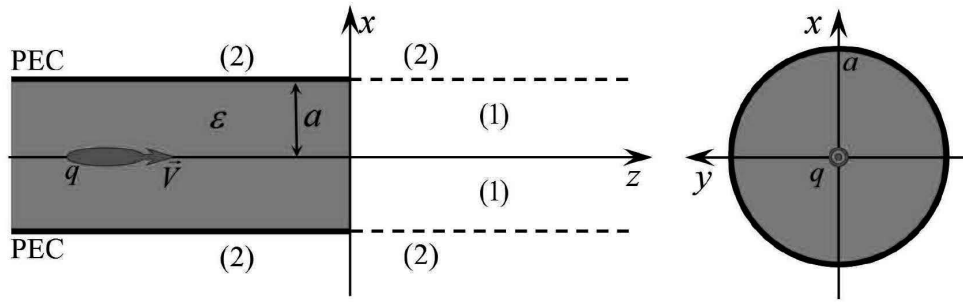


Рис. 1. Геометрия задачи и основные обозначения

где

$$s = \sqrt{k_0^2/\beta^2(\varepsilon\beta^2 - 1)}, \quad \text{Im } s > 0.$$

Падающее поле в вакууме зададим всюду вне волновода, оно имеет вид

$$H_{\varphi\omega}^{(i0)} = \frac{iqs_0}{2c} e^{i\frac{s_0}{v}z} H_1^{(1)}(\rho s_0), \tag{4}$$

где

$$s_0 = i\sigma_0, \quad \sigma_0 = k_0\sqrt{\beta^{-2} - 1}, \quad \text{Re } \sigma_0 > 0.$$

Отраженное обратно в волновод поле имеет вид

$$H_{\varphi\omega}^{(r)} = \frac{iq}{2c} \sum_{m=1}^{\infty} M_m J_1\left(\frac{\rho j_{0m}}{a}\right) e^{-ik_{zm}z}, \tag{5}$$

где j_{0m} — нули функции Бесселя $J_0(\xi)$,

$$k_{zm} = \sqrt{k_0^2\varepsilon - \frac{j_{0m}^2}{a^2}}, \quad \text{Im } k_{zm} > 0. \tag{6}$$

Коэффициенты $\{M_m\}$ требуется найти. Однако из условия Мейкснера на ребре $\rho = a - 0, z = -0$ можно установить поведение этих коэффициентов при больших номерах [25, 26, 28, 29]:

$$M_m \sim m^{-(1+\tau)} \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad \tau = \frac{1}{\pi} \text{asin} \frac{\varepsilon - 1}{2(\varepsilon + 1)}, \tag{7}$$

причем $0 < \tau < 1/6$.

Дальнейший ход решения аналогичен работе [28]. Дифракционное поле в вакууме (области «1» и «2», см. рис. 1) описывается уравнением Гельмгольца:

$$[\partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial \rho^2 + \rho^{-1}\partial/\partial \rho + (k_0^2 - \rho^{-2})] H_{\varphi\omega}^{(1,2)} = 0. \tag{8}$$

Вводим в рассмотрение функции $\Psi_{\pm}(\rho, \alpha)$, являющиеся по сути односторонними фурье-преобразованиями поля $H_{\varphi\omega}$ (здесь и далее нижний индекс \pm означает, что функция голоморфна и не имеет нулей, соответственно, в верхней полуплоскости, $\text{Im } \alpha > -\delta$, или в нижней полуплоскости, $\text{Im } \alpha < \delta$):

$$\Psi_+^{(1,2)}(\rho, \alpha) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} dz H_{\varphi\omega}^{(1,2)}(\rho, z) e^{i\alpha z}, \tag{9}$$

$$\Psi_-^{(2)}(\rho, \alpha) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^0 dz H_{\varphi\omega}^{(2)}(\rho, z) e^{i\alpha z}, \tag{10}$$

и аналогичные фурье-преобразования поля $E_{z\omega}^{(1,2)}$, например:

$$\Phi_+^{(1,2)}(\rho, \alpha) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty dz \frac{k_0}{i} E_{z\omega}^{(1,2)}(\rho, z) e^{i\alpha z}. \quad (11)$$

Дальнейшие преобразования подробно изложены в статье [28], поэтому здесь приведем их схематично. В области «1» ($\rho < a, z > 0$) применяем одностороннее преобразование (9) к (8) и получаем неоднородное дифференциальное уравнение на функцию $\Psi_+^{(1)}(\rho, \alpha)$, в левой части которого стоит оператор Бесселя, а правая часть определяется значениями $\partial H_{\varphi\omega}/\partial z|_{z=0}$ и $H_{\varphi\omega}|_{z=0}$ и находится из граничных условий непрерывности тангенциальных компонент поля в сечении $z = 0$. В области «2» ($\rho > a, -\infty < z < +\infty$) к (8) применяем обычное преобразование Фурье, представляя его в виде суммы (9) и (10), и получаем однородное уравнение Бесселя на функцию $\Psi_-^{(2)}(\rho, \alpha) + \Psi_+^{(2)}(\rho, \alpha)$. Общие решения этих уравнений имеют следующий вид:

$$\Psi_+^{(1)}(\rho, \alpha) = C_1 J_1(\rho\kappa) + D_1 H_1^{(1)}(\rho\kappa) + \tilde{\Psi}_p^{(1)}(\rho, \alpha), \quad (12)$$

$$\Psi_-^{(2)}(\rho, \alpha) + \Psi_+^{(2)}(\rho, \alpha) = C_2 H_1^{(1)}(\rho\kappa), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_p^{(1)}(\rho, \alpha) = & \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \left[\frac{\omega/(v\varepsilon) - \alpha}{\kappa^2 - s^2} s \left(H_1^{(1)}(\rho s) - \frac{H_0^{(1)}(as)}{J_0(as)} J_1(\rho s) \right) - \right. \\ & - \frac{s_0}{\omega/v + \alpha} H_1^{(1)}(\rho s_0) - \\ & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} M_m \frac{k_{zm}/\varepsilon + \alpha}{\alpha_m^2 - \alpha^2} J_1 \left(\frac{\rho j_{0m}}{a} \right) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где $C_{1,2}, D_1$ — некоторые константы, которые будут определены ниже,

$$\alpha_m = \sqrt{k_0^2 - \frac{j_{0m}^2}{a^2}}, \quad \text{Im } \alpha_m > 0, \quad (15)$$

— продольные волновые числа вакуумного волновода радиуса a .

Отметим, что принципиальным моментом для построения корректного решения является наличие в общем решении (12) слагаемого $D_1 H_1^{(1)}(\rho\kappa)$. Напомним, что $\Psi_+^{(1)}(\rho, \alpha)$ является преобразованием дифракционного поля в вакуумной области, т. е. соответствует решению *однородных* уравнений Максвелла. Частное же решение (14) содержит сингулярные на оси функции (засчет различия в падающем поле слева и справа от границы $z = 0$), особенность которых при $\rho = 0$ следует скомпенсировать подбором константы D_1 . Данное обстоятельство является нетипичным, так как обычно в качестве решения однородного уравнения Бесселя в области, содержащей нулевую точку, берутся только регулярные решения, т. е. функции Бесселя.

Итак, особенность при $\rho \rightarrow 0$ в (12) будет скомпенсирована при выборе

$$D_1 = \frac{-i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \kappa \left(\frac{\omega/(v\varepsilon) - \alpha}{\kappa^2 - s^2} - \frac{1}{\omega/v + \alpha} \right), \quad (16)$$

поэтому можно переписать

$$\Psi_+^{(1)}(\rho, \alpha) = C_1 J_1(\rho\kappa) + \Psi_p^{(1)}(\rho, \alpha), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_p^{(1)}(\rho, \alpha) = & \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \left[\frac{\omega/(v\varepsilon) - \alpha}{\kappa^2 - s^2} \left(s H_1^{(1)}(\rho s) - \kappa H_1^{(1)}(\rho\kappa) - s \frac{H_0^{(1)}(as)}{J_0(as)} J_1(\rho s) \right) - \right. \\ & - \frac{1}{\omega/v + \alpha} \left(s_0 H_1^{(1)}(\rho s_0) - \kappa H_1^{(1)}(\rho\kappa) \right) - \\ & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} M_m \frac{k_{zm}/\varepsilon + \alpha}{\alpha_m^2 - \alpha^2} J_1 \left(\frac{\rho j_{0m}}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогично

$$\Phi_+^{(1)}(\rho, \alpha) = C_1 \frac{i\kappa}{k_0} J_0(\rho\kappa) + \Phi_p^{(1)}(\rho, \alpha), \tag{19}$$

$$\Phi_-^{(2)}(\rho, \alpha) + \Phi_+^{(2)}(\rho, \alpha) = C_2 \frac{i\kappa}{k_0} H_0^{(1)}(\rho\kappa), \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \Phi_p^{(1)}(\rho, \alpha) = & \frac{i}{2\pi} \frac{i}{k_0} \frac{iq}{2c} \left[\frac{\omega/(v\varepsilon) - \alpha}{\kappa^2 - s^2} \left(s^2 H_0^{(1)}(\rho s) - \kappa^2 H_0^{(1)}(\rho\kappa) - s^2 \frac{H_0^{(1)}(as)}{J_0(as)} J_0(\rho s) \right) - \right. \\ & - \frac{1}{\omega/v + \alpha} \left(s_0^2 H_0^{(1)}(\rho s_0) - \kappa^2 H_0^{(1)}(\rho\kappa) \right) - \\ & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} M_m \frac{j_{0m}}{a} \frac{k_{zm}/\varepsilon + \alpha}{\alpha_m^2 - \alpha^2} J_0 \left(\frac{\rho j_{0m}}{a} \right) \right]. \end{aligned} \tag{21}$$

Из условия $E_{z\omega}^{(2)} = 0$ при $\rho = a, z < 0$ получаем

$$C_2 = \frac{\Phi_+^{(2)}(a, \alpha) + \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \frac{i}{k_0} \frac{s_0^2 H_0^{(1)}(as_0)}{\alpha + \omega v^{-1} - i0}}{i\kappa k_0^{-1} H_0^{(1)}(a\kappa)}. \tag{22}$$

Сшивая $E_{z\omega}$ при $\rho = a, z > 0$, получаем

$$C_1 = \frac{\Phi_+^{(2)}(a, \alpha) - \Phi_p^{(1)}(a, \alpha)}{i\kappa k_0^{-1} J_0(a\kappa)}. \tag{23}$$

Далее, сшивая $H_{\varphi\omega}$ при $\rho = a, z > 0$ и используя (23) и (21), получаем связь

$$\begin{aligned} \Psi_+^{(2)}(a, \alpha) = & \frac{k_0}{i} \frac{\Phi_+^{(2)}(a, \alpha) J_1(a\kappa)}{\kappa J_0(a\kappa)} + \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \frac{1}{J_0(a\kappa)} \left[\frac{2i}{a\pi} \frac{\omega/(v\varepsilon) - \alpha}{\kappa^2 - s^2} \frac{J_0(as) - J_0(a\kappa)}{J_0(as)} + \right. \\ & + \frac{s_0}{\omega v^{-1} + \alpha} \left(\frac{s_0}{\kappa} H_0^{(1)}(as_0) J_1(a\kappa) - J_0(a\kappa) H_1^{(1)}(as_0) - \frac{2i}{\pi a s_0} \right) \left. \right] - \\ & - \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \sum_{m=1}^{\infty} M_m J_1(j_{0m}) \frac{k_{zm}/\varepsilon + \alpha}{\alpha_m^2 - \alpha^2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Нетрудно видеть, что правая часть (24) не имеет точек ветвления, а также не имеет полюсов в точках обращения в нуль знаменателей $\omega v^{-1} + \alpha$ и $\kappa^2 - s^2$. Однако формально она имеет «паразитные» полюса при $\alpha = \alpha_p, p = 1, 2, \dots$, которые должны быть скомпенсированы наложением так называемых «регуляризующих соотношений» на функцию $\Phi_+^{(2)}(a, \alpha)$ (см. [28]):

$$\begin{aligned} & \frac{k_0}{i} \Phi_+^{(2)}(a, \alpha_p) + \\ & + \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \frac{1}{J_1(j_{0p})} \left[\frac{j_{0p}}{a} \left(\frac{2i}{a\pi} \frac{\omega/(v\varepsilon) - \alpha_p}{(j_{0p}/a)^2 - s^2} + \frac{1}{\omega/v + \alpha_p} \left(\frac{s_0^2 a}{j_{0p}} J_1(j_{0p}) H_0^{(1)}(as_0) - \frac{2i}{a\pi} \right) \right) \right. \\ & \left. + \frac{M_p a}{2} \left(\frac{k_{zp}}{\varepsilon} + \alpha_p \right) J_1^2(j_{0p}) \right] = 0, \quad p = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{25}$$

Теперь, подставляя (22) в (13) и используя связь (24), получаем уравнение Винера – Хопфа – Фока:

$$\begin{aligned} \Psi_-^{(2)}(a, \alpha) + & \frac{2k_0 \Phi_+^{(2)}(a, \alpha)}{\kappa G(\alpha)} + \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \frac{1}{J_0(a\kappa)} \times \\ & \times \left[\frac{2i}{a\pi} \frac{\omega/(v\varepsilon) - \alpha}{\kappa^2 - s^2} \frac{J_0(as) - J_0(a\kappa)}{J_0(as)} + \frac{s_0}{\omega/v + \alpha} \left(\frac{s_0}{\kappa} H_0^{(1)}(as_0) J_1(a\kappa) - J_0(a\kappa) H_1^{(1)}(as_0) - \frac{2i}{as_0\pi} \right) \right] - \\ & - \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \sum_{m=1}^{\infty} M_m J_1(j_{0m}) \frac{k_{zm}/\varepsilon + \alpha}{\alpha_m^2 - \alpha^2} - \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \frac{s_0^2 H_0^{(1)}(as_0) H_1^{(1)}(a\kappa)}{\kappa H_0^{(1)}(a\kappa) (\alpha + \omega v^{-1} - i0)} = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$G(\alpha) = \pi a \kappa J_0(a\kappa) H_0^{(1)}(a\kappa).$$

Выполняя стандартные факторизации и асимптотические оценки, получаем формальное решение уравнения (26) в следующем виде:

$$\Phi_+^{(2)}(a, \alpha) = \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \frac{\kappa_+(\alpha) G_+(\alpha)}{2k_0} \left[\sum_{m=1}^{\infty} (M_m J_1(j_{0m}) U_{m+}(\alpha) + V_{m+}(\alpha)) - s_0^2 H_0^{(1)}(as_0) T_+(\alpha) \right], \quad (27)$$

где

$$\kappa_{\pm} = \sqrt{k_0 \pm \alpha}, \quad G(\alpha) = G_+(\alpha) G_-(\alpha)$$

(для вычисления $G_{\pm}(\alpha)$ могут быть использованы стандартные интегральные формулы из [25]),

$$U_{m+}(\alpha) = G_+(\alpha_m) \kappa_+(\alpha_m) \frac{k_{zm}/\varepsilon - \alpha_m}{2\alpha_m(\alpha_m + \alpha)}, \quad (28)$$

$$V_{m+}(\alpha) = \frac{2i}{a\pi} \frac{G_+(\alpha_m) \kappa_+(\alpha_m) j_{0m}}{a^2 \alpha_m J_1(j_{0m})(\alpha_m + \alpha)} \left(\frac{\omega/(v\varepsilon) + \alpha_m}{(j_{0m}/a)^2 - s^2} + \frac{1}{\alpha_m - \frac{\omega}{v}} \right), \quad (29)$$

$$T_+(\alpha) = \frac{2i}{\alpha + \omega/v - i0} \left[\frac{1}{G_+(\alpha) \kappa_+(\alpha)} - \frac{1}{G_+(-\omega/v) \kappa_+(-\omega/v)} \right]. \quad (30)$$

Подставляя решение (27) в условие (25), получаем бесконечную линейную систему уравнений на искомые коэффициенты $\{M_m\}$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} W_{pm} M_m = w_p, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (31)$$

где

$$W_{pm} = J_1(j_{0m}) \left[\kappa_+(\alpha_p) G_+(\alpha_p) U_{m+}(\alpha_p) + \delta_{mp} i a \left(\frac{k_{zm}}{\varepsilon} + \alpha_m \right) \right],$$

$$w_p = \frac{-2i j_{0p}}{a J_1(j_{0p})} \left[\frac{2i}{\pi a} \frac{\omega/(v\varepsilon) - \alpha_p}{(j_{0p}/a)^2 - s^2} + \frac{1}{\alpha_p + \omega/v} \left(\frac{s_0^2 a}{j_{0p}} J_1(j_{0p}) H_0^{(1)}(as_0) - \frac{2i}{a\pi} \right) \right] -$$

$$- \kappa_+(\alpha_p) G_+(\alpha_p) \left[\sum_{m=1}^{\infty} V_{m+}(\alpha_p) + i s_0^2 H_0^{(1)}(as_0) T_+(\alpha_p) \right], \quad (32)$$

где δ_{mp} — символ Кронекера. Как можно показать, данная система сходится и может решаться численно методом редукции (аналогично тому, как решалась похожая система в [28]), в результате чего набор коэффициентов $\{M_m\}$ можно считать известным. После этого нетрудно вычислить и поле вне волновода.

В частности, для области $z > 0$ имеем следующее единое представление для всех ρ (соответствующие преобразования аналогичны преобразованиям в [28] и достаточно громоздки, поэтому мы их здесь не приводим):

$$H_{\varphi\omega}^{(1,2)}(\rho, z > 0) = \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa_+(\alpha_m) G_+(\alpha_m)}{\alpha_m} Q_m 2\pi a L_m^+(\rho, z) +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \frac{s_0^2 H_0^{(1)}(as_0)}{G_+(-\omega/v) \kappa_+(-\omega/v)} 2\pi a L_{\beta}^+(\rho, z). \quad (33)$$

Здесь

$$Q_m = \frac{1}{2i} \left[\frac{2i}{\pi a} \frac{j_{0m}}{a^2 J_1(j_{0m})} \left(\frac{\omega/(v\varepsilon) + \alpha_m}{(j_{0m}/a)^2 - s^2} + \frac{1}{\alpha_m - \omega/v} \right) + M_m J_1(j_{0m}) \frac{k_{zm}/\varepsilon - \alpha_m}{2} \right]. \quad (34)$$

Функция L_m^+ имеет вид (ее определение совпадает с формулой (47) в работе [28]):

$$L_m^+(\rho, z) = \int_{-\Gamma'_+}^{\Gamma'_+} \frac{\kappa(\alpha) J_1(\rho\kappa) J_0(a\kappa)}{\kappa_+(\alpha) G_+(\alpha) (\alpha - \alpha_m)} e^{i\alpha z} d\alpha, \quad (35)$$

где контур $-\Gamma'_+$ идет из точки k_0 вдоль разреза функции $\kappa(\alpha)$ в первом квадранте по берегу с $\arg \kappa = 0$. Для этого контура справедлива следующая параметризация:

$$\alpha = k'_0 k''_0 / \alpha'' + i \alpha'', \quad \alpha'' \in [k''_0, \infty).$$

Функция L^+_β отличается от L^+_m заменой $\alpha_m \rightarrow \omega/v$ и имеет вид

$$L^+_\beta(\rho, z) = \int_{-\Gamma'_+} \frac{\kappa(\alpha) J_1(\rho \kappa) J_0(a \kappa)}{\kappa_+(\alpha) G_+(\alpha) (\alpha - \omega/v)} e^{i \alpha z} d\alpha. \tag{36}$$

Для асимптотического анализа поля более удобно следующее представление для поля в области «2» ($\rho > a, -\infty < z < \infty$) с интегралами по вещественной оси α :

$$H^{(2)}_{\varphi\omega}(\rho, z) = \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa_+(\alpha_m) G_+(\alpha_m)}{\alpha_m} Q_m I_m^{(2)}(\rho, z) + \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \frac{s_0^2 H_0^{(1)}(as_0)}{G_+(-\omega/v) \kappa_+(-\omega/v)} I_\beta^{(2)}(\rho, z), \tag{37}$$

где

$$I_m^{(2)}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_+(\alpha) G_+(\alpha) H_1^{(1)}(\rho \kappa)}{\kappa(\alpha) H_0^{(1)}(a \kappa) (\alpha + \alpha_m)} e^{-i \alpha z} d\alpha, \tag{38}$$

$$I_\beta^{(2)}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_+(\alpha) G_+(\alpha) H_1^{(1)}(\rho \kappa)}{\kappa(\alpha) H_0^{(1)}(a \kappa) (\alpha + \omega/v - i0)} e^{-i \alpha z} d\alpha. \tag{39}$$

Второе слагаемое в (33) и (37) описывает дифракционное излучение при вылете заряда из открытого конца вакуумного волновода. В частности, второе слагаемое в (37) совпадет с соответствующим выражением в работе [4] (с учетом очевидных переобозначений). Первое слагаемое в (33) и (37) (сумма по m) обусловлено наличием границы раздела вакуум-диэлектрик на торце волновода, поэтому его можно трактовать как переходное излучение на границе раздела конечного размера, ограниченной стенками волновода. Отметим также, что полученное выше решение справедливо как для случая вылета заряда из волновода ($v > 0$, рис. 1), так и для случая влета ($v < 0$), однако в дальнейшем обсуждается только случай $v > 0$.

Обсудим процедуру асимптотического вычисления поля в дальней зоне (в области «2») с помощью метода перевала [32]. Поместим в точку $x = y = z = 0$ начало сферической системы координат R, θ, φ , угол θ будем отсчитывать от положительного направления оси z . Асимптотика интеграла (38) исследована в работе [28]. Как обычно, считаем, что выполнены неравенства, определяющие дальнюю зону, $k_0 R \gg 1$, а также $R \gg a$ и угол наблюдения θ лежит в диапазоне $\theta \gg \theta_{\min}, \pi - \theta \gg \theta_{\min}$, где $\theta_{\min} = 1/\sqrt{k_0 R}$ (отметим, что всюду в дальнейшем предполагается, что $1/\sqrt{k_0 R} > a/R$, т. е. минимальный и максимальный углы наблюдения всегда лежат в области «2»).

Главный член асимптотики интеграла (38) имеет вид сферической волны:

$$I_m^{(2)}(\rho, z) \approx \pi a \frac{\exp(ik_0 R)}{R} \frac{\kappa_-(k_0 \cos \theta)}{G_+(k_0 \cos \theta)} \frac{2J_0(ak_0 \sin \theta)}{k_0 \cos \theta - \alpha_m}. \tag{40}$$

Асимптотика интеграла (39) строится в целом аналогичным образом. Отметим, что вклад полюса $\alpha = -\omega/v + i0$ является экспоненциально малым при β далеко от 1, поэтому его обычно не учитывают в главном члене [33]. Однако при $\beta \rightarrow 1$ вклад этого полюса перестает быть в общем случае пренебрежимо

малым, кроме того при малых углах наблюдения θ он находится вблизи седловой точки. С учетом этого факта асимптотика (39) имеет следующий вид (см. [32]):

$$I_{\beta}^{(2)}(\rho, z) \approx I_{\beta}^{(2)P}(\rho, z)\Phi(\theta - \theta_{\beta}) + \pi a \frac{\exp(ik_0 R)}{R} \left[\frac{\kappa_{-}(k_0 \cos \theta)}{G_{+}(k_0 \cos \theta)} \frac{2J_0(ak_0 \sin \theta)}{k_0 \cos \theta - \omega/v} - \frac{\sqrt{\kappa(\omega/v)}}{\sqrt{k_0 \sin \theta}} \frac{\sqrt{2}J_0(a\kappa(\omega/v))}{b_0(\theta)G_{+}(\omega/v)\kappa_{+}(\omega/v)} \right] \pm \tag{41}$$

$$\pm \pi a \frac{\exp(ik_0 R - i(3\pi/4))}{\sqrt{R \sin \theta}} 2iQ \left(\mp i\sqrt{k_0 R} e^{i\frac{\pi}{4}} b_0(\theta) \right) \exp[-ik_0 R b_0^2(\theta)] \frac{\sqrt{2\kappa(\omega/v)}J_0(a\kappa(\omega/v))}{G_{+}(\omega/v)\kappa_{+}(\omega/v)},$$

где $\Phi(\theta)$ — ступенчатая функция Хэвисайда, угол θ_{β} определен равенством $\cos \theta_{\beta} = \beta$ или равенством $\sin \theta_{\beta} = \gamma^{-1}$ ($\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ — Лоренц-фактор), вычет в полюсе $\alpha = -\omega/v + i0$, обозначенный как $I_{\beta}^{(2)P}(\rho, z)$, связан с падающим полем вне волновода (4) соотношением

$$\frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \frac{s_0^2 H_0^{(1)}(as_0)}{G_{+}(-\omega/v)\kappa_{+}(-\omega/v)} I_{\beta}^{(2)P}(\rho, z) = -H_{\varphi\omega}^{(i0)}(\rho, z), \tag{42}$$

$$b_0(\theta) = \sqrt{1 - \sin(\theta + \theta_0)}, \quad \theta_0 = \pi/2 - i \operatorname{arccch}(\beta^{-1}), \quad \operatorname{Re} b_0 < 0, \tag{43}$$

знаки \pm соответствуют $\operatorname{arg} b_0 \leq 3\pi/4$,

$$Q(y) = \int_y^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = e^{-y^2} \int_0^{\infty} \exp(-\xi^2 - 2\xi y) d\xi. \tag{44}$$

Первое слагаемое в (41), согласно равенствам (37) и (42), компенсирует падающее поле $H_{\varphi\omega}^{(i0)}(\rho, z)$ в области углов $\theta > \theta_{\beta}$. Таким образом, собственное поле заряда вне волновода оказывается сосредоточенным внутри конуса $\theta < \theta_{\beta}$, угол раствора которого уменьшается с ростом Лоренц-фактора γ , $\theta_{\beta} \sim 1/\gamma$ при $\gamma \gg 1$. Однако границы этого конуса не являются резкими, поскольку равномерная асимптотическая формула (41) описывает плавный переход от наличия вклада полюса к его отсутствию. Также поскольку обсуждаемый первый член в выражении (41) пропорционален падающему полю $H_{\varphi\omega}^{(i0)}(\rho, z)$, данную асимптотику необходимо рассматривать совместно с падающим полем. Целесообразно ввести соответствующую величину $I^{(i0)}(\rho, z)$ согласно равенству

$$H_{\varphi\omega}^{(i0)}(\rho, z) = \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{2c} \frac{s_0^2 H_0^{(1)}(as_0)}{G_{+}(-\omega/v)\kappa_{+}(-\omega/v)} I^{(i0)}(\rho, z). \tag{45}$$

Тогда сумма $I^{(i0)}(\rho, z) + I_{\beta}^{(2)}(\rho, z)$ пропорциональна полному полю в области «2» в случае вылета заряда из открытого конца вакуумного волновода и, с учетом равномерной асимптотики (41) для второго слагаемого, описывает плавный переход от наличия собственного поля заряда внутри конуса $\theta < \theta_{\beta}$ к его отсутствию вне данного конуса.

При $\beta \rightarrow 1$ первое слагаемое в квадратных скобках в (41) имеет особенность при $\theta \rightarrow 0$ (полюс приближается к седловой точке), эта особенность компенсируется вторым слагаемым в квадратных скобках, и в целом квадратная скобка всегда конечна. Скачек первого слагаемого в (41) при $\theta = \theta_{\beta}$, связанный с «включением» функции Хэвисайда при $\theta > \theta_{\beta}$, компенсируется скачком в последнем слагаемом, так как при переходе θ через значение θ_{β} полюс $\alpha = -\omega/v + i0$ пересекает контур наискорейшего спуска, $\operatorname{arg} b_0(\theta)$ переходит через значение $3\pi/4$ и значение функции $Q(y)$ меняется скачком, величина которого определяется соотношением

$$Q(y) + Q(-y) = \sqrt{\pi}.$$

В случае, когда полюс далек от седловой точки, т. е. когда угол θ удовлетворяет неравенству

$$|\sqrt{k_0 R} b_0(\theta)| \gg 1,$$

имеем

$$\pm 2iQ \left(\mp i\sqrt{k_0 R} e^{i\frac{\pi}{4}} b_0(\theta) \right) \exp[-ik_0 R b_0^2(\theta)] \approx \frac{-\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{k_0 R} b_0(\theta)}, \tag{46}$$

и асимптотика принимает более простой вид (т. е. переходит в обычную «неравномерную» асимптотику):

$$I_{\beta}^{(2)}(\rho, z) \approx I_{\beta}^{(2)P}(\rho, z)\Phi(\theta - \theta_{\beta}) + \pi a \frac{\exp(ik_0 R)}{R} \frac{\kappa_{-}(k_0 \cos \theta)}{G_{+}(k_0 \cos \theta)} \frac{2J_0(ak_0 \sin \theta)}{k_0 \cos \theta - \omega/v}, \quad (47)$$

где второе слагаемое аналогично по виду выражению (40) и описывает сферическую волну дифракционного излучения.

Обсудим более подробно условие достаточной удаленности полюса от седловой точки, которое запишем в виде

$$|\sqrt{k_0 R} b_0(\theta)| = \sqrt{\Lambda},$$

где Λ — некоторое «большое» число. После несложных преобразований имеем

$$|\sqrt{k_0 R} b_0(\theta)| = \sqrt{k_0 R} \sqrt{\beta^{-1} - \cos \theta} = \sqrt{\Lambda}. \quad (48)$$

При угле наблюдения $\theta = \theta_{\beta}$ условие (48) дает

$$k_0 R = \Lambda \beta \gamma^2,$$

что при $\gamma \gg 1$ переходит в

$$k_0 R \approx \Lambda \gamma^2.$$

При минимальном угле наблюдения

$$\theta = \theta_{\min} = 1/\sqrt{k_0 R}, \quad k_0 R \gg 1,$$

условие (48) дает

$$k_0 R = \frac{\Lambda - 1/2}{\beta^{-1} - 1},$$

что при $\gamma \gg 1$ переходит в

$$k_0 R \approx (2\Lambda - 1)\gamma^2.$$

Асимптотика функции $Q(y)$, следующая из (46), достаточно хорошо работает уже при $\Lambda = 10$. Поэтому при таком значении Λ и $\gamma \gg 1$ использование «неравномерной» асимптотики (47) при $\theta = \theta_{\beta}$ оправданно на расстояниях $R \geq 10\gamma^2/k_0$, а при $\theta = 1/\sqrt{k_0 R}$ (т. е. на минимальном угле) — на расстояниях $R \geq 19\gamma^2/k_0$, т. е. начиная с практически вдвое большего расстояния. Из (48) также следует, что если «неравномерная» асимптотика при соответствующем R применима, например, при $\theta = \theta_{\beta}$, то она также применима и при всех больших θ ($|b_0(\theta)|$ монотонно возрастает с ростом θ). При $\theta \sim \theta_{\beta}$ использование «неравномерной» асимптотики неоправданно при $\Lambda < 10$, что будет проиллюстрировано далее.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В рамках современных практических применений рассматриваемой волноводной структуры наибольший интерес представляет генерация излучения Вавилова – Черенкова (ИВЧ) релятивистскими электронными сгустками в волноводе (в виде дискретного набора так называемых «черенковских мод») и его выход из открытого конца в свободное пространство. Отметим, что в последнее время типичными являются эксперименты по регистрации ИВЧ в достаточно узком спектральном диапазоне. Например, в работе [34] спектр ИВЧ измерялся в диапазоне длин волн 0.8-1.6 см, в работе [35] исследовалось сверх-узкополосное ИВЧ в далеком инфракрасном диапазоне с относительной шириной спектральной полосы порядка $10^{-4} - 10^{-5}$, в работе [36] представлены результаты регистрации ИВЧ на длине волны 600 нм при ширине полосы 10 нм. Поэтому, имея в виду такие узкополосные измерения, мы в данной работе ограничимся анализом фурье-гармоник поля. Также в дальнейшем будут рассматриваться релятивистские скорости заряда, а для получения графических результатов для фурье-гармоник поля будут главным образом использоваться соответствующие черенковские частоты.

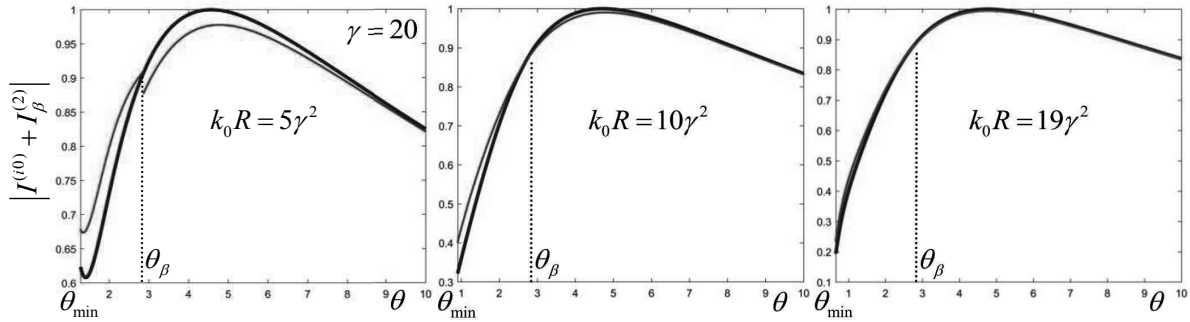


Рис. 2. (Цветной онлайн) Модуль фурье-гармоники полного поля (для случая вылета заряда из вакуумного волновода) в дальней зоне области «2» при малых углах $\theta \sim \theta_{\beta}$, значении Лоренц-фактора $\gamma = 20$ и различных расстояниях R на первой черенковской частоте, $\omega = \omega_1^{CR}$. Синяя линия рассчитана по формуле равномерной асимптотики (41), красная — по формуле «неравномерной» асимптотики (47). Каждый график нормирован на максимум синей кривой. Параметры задачи: $a = 0.24$ см, $\varepsilon = 2 + 0.001i$, $q = -1$ нКл, $\omega_1^{CR} \approx 2\pi \cdot 47.8$ ГГц

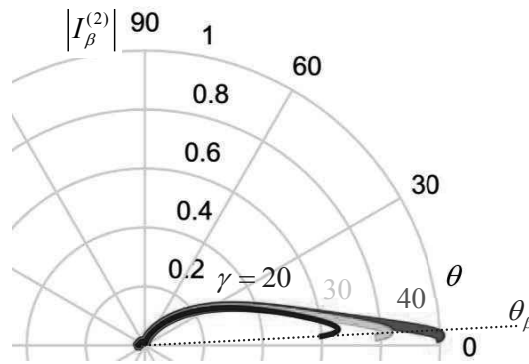


Рис. 3. (Цветной онлайн) Нормированные диаграммы направленности излучения точечного заряда при его вылете из открытого конца вакуумного волновода при различных γ в диапазоне углов $\theta \in [\theta_{\beta}, \pi - \theta_{\beta}]$. Параметры задачи те же, что и на рис. 2. Пунктирной линией показан угол θ_{β} для $\gamma = 20$

При заданной скорости заряда β (или при заданном Лоренц-факторе γ) частота «черенковской моды» f_l^{CR} (l — номер моды) определяется из известного соотношения

$$\omega_l^{CR} = 2\pi f_l^{CR} = c\beta j_{0l} / (a\sqrt{\varepsilon\beta^2 - 1}), \tag{49}$$

где j_{0l} — l -ый нуль функции Бесселя $J_0(\xi)$. Соотношение (49) означает, что $k_{zl} = \omega_l^{CR}/v$, т.е. l -ая волноводная мода синхронна с зарядом, при этом также выполняется равенство $as = j_{0l}$.

На этой частоте, вообще говоря, падающее поле внутри волновода (3) равно бесконечности из-за наличия $J_0(as)$ в знаменателе, что отражается также и на итоговых формулах (32) и (34), где в знаменателе стоит выражение $j_{0m}^2 a^{-2} - s^2$, которое также обращается в нуль. Поэтому мы поступаем следующим образом: вводим в диэлектрик малое поглощение, т.е. считаем, что

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'', \quad \varepsilon'' > 0 \ (\omega > 0), \quad \varepsilon'' \ll \varepsilon'.$$

Черенковская частота, вычисленная по формуле (49) с таким ε , также становится комплексной величиной с малой отрицательной мнимой частью. Дальнейшие расчеты проводим на частоте $\omega = \text{Re} \omega_l^{CR}$, на которой падающее поле (3) и соответствующие слагаемые в формулах (34) и (32) конечны, но имеют резкие максимумы. Таким образом, частотный спектр переходного излучения на рассматриваемой границе раздела конечного размера (первое слагаемое в (33) и (37)) имеет ярко выраженные максимумы на черенковских частотах, т.е. имеет те же характерные особенности, что и падающее поле (3).

В первую очередь рассмотрим асимптотическое поведение суммы $I^{(i0)}(\rho, z) + I_{\beta}^{(2)}(\rho, z)$, совпадающей с точностью до множителя с фурье-гармоникой полного поля в области «2» в случае отсутствия диэлектри-

ческого заполнения волновода (т. е. при вылете заряда из вакуумного волновода). На рис. 2 представлены зависимости модуля этой величины в дальней зоне ($k_0 R \gg 1$) при $\gamma = 20$ и сравнительно малых углах θ ($\theta \sim \theta_\beta$). Частота ω для определенности выбрана равной первой черенковской частоте ω_1^{CR} , но никакой сильной зависимости от близости (или удаленности) данной частоты к черенковским частотам полное поле в вакуумном случае не имеет, что вполне естественно. Математически это выражается в том, что величина Q_m (34), имеющая резкую зависимость от частоты в окрестности ω_m^{CR} , $m = 1, 2, \dots$, входит только в первое слагаемое в (37). Синие линии рассчитаны по равномерной асимптотической формуле (41), красные линии — по формуле «неравномерной» асимптотики (47). Видно, что при $k_0 R = 5\gamma^2 = 2000$ ($\Lambda = 5$, левый график на рис. 2) «неравномерная» асимптотика имеет заметный скачек при $\theta = \theta_\beta$ и существенно отличается от равномерной практически во всем представленном на графике диапазоне углов. Математически это вызвано тем, что при $\Lambda = 5$ аргумент функции Q в (41) недостаточно велик при этих углах наблюдения и формула (46) несправедлива. С физической точки зрения это означает, что рассмотренный диапазон углов при данном R лежит в области, аналогичной по своей сути «области полутени», где сферическая волна излучения неотделима от полного поля.

При $k_0 R = 10\gamma^2 = 4000$ ($\Lambda = 10$, средний график на рис. 2) аргумент функции Q в (41) достаточно велик при $\theta = \theta_\beta$ и больших углах, поэтому кривые практически совпадают при $\theta \geq \theta_\beta$ (скачек при $\theta = \theta_\beta$ также становится несущественным), однако заметные отличия все еще имеются при $\theta < \theta_\beta$. Наконец, при $\Lambda = 19$ (правый график на рис. 2) кривые практически совпадают во всем представленном диапазоне углов, в т. ч. и при $\theta = \theta_{\min}$.

Однако диапазон углов, при котором (47) является асимптотикой исходного интеграла (39), ограничен в области малых углов дополнительным неравенством $\theta \gg \theta_{\min}$. При $\gamma \gg 1$ угол $\theta_\beta \approx \gamma^{-1}$ и следовательно при $k_0 R \geq 10\gamma^2$ удовлетворяет этому дополнительному неравенству, так как при этом $\theta_{\min} \leq (\sqrt{10}\gamma)^{-1}$. Поэтому при $\theta \geq \theta_\beta$ и $R \geq 10\gamma^2/k_0$ формула (47) описывает асимптотику интеграла (39), а второе слагаемое в этой формуле описывает асимптотику суммы $I^{(i0)}(\rho, z) + I_\beta^{(2)}(\rho, z)$, т. е. с точностью до множителя — асимптотику фурье-гармоники полного поля в вакуумном случае. В этом диапазоне углов и расстояний полное поле представлено только сферической волной «вакуумного» дифракционного излучения, можно говорить о диаграмме направленности этого излучения, а собственное поле заряда несущественно, так как скачек на кривых рис. 2, связанный с этим полем, пренебрежимо мал.

На рис. 3 представлены нормированные диаграммы направленности дифракционного излучения на открытом конце вакуумного волновода (т. е. «вакуумного» дифракционного излучения) при различных γ в диапазоне углов $\theta \in [\theta_\beta, \pi - \theta_\beta]$ на частоте первой «черенковской моды». Эти диаграммы определяются множителем при $\exp(ik_0 R)/R$ второго слагаемого в (47). Видно, что с ростом γ в выбранных пределах диаграмма практически не меняет своей формы, однако величина главного лепестка увеличивается.

Далее будет рассмотрено излучение при наличии диэлектрического заполнения волновода. На рис. 4 представлены диаграммы направленности излучения в дальней зоне ($\pi - \theta_\beta \geq \theta \geq \theta_\beta$, $R = 10\gamma^2/k_0$), рассчитанные по общей формуле (37) с учетом асимптотики интеграла $I_m^{(2)}(\rho, z)$ в виде сферической волны (40) и асимптотики интеграла $I_\beta^{(2)}(\rho, z)$ в виде сферической волны (47) (второе слагаемое). Сплошная (красная) линия соответствует полному полю, т. е. учитываются оба слагаемых в (37), пунктирная (зеленая) линия соответствует первому слагаемому в (37) (сумма по m), штрихпунктирная (синяя) линия — второму слагаемому в (37). Кривые нормированы на максимум штрихпунктирной линии, т. е. на максимум дифракционного излучения в вакуумном случае. От графика к графику увеличивается частота: на верхнем левом графике (обозначенном «0%») частота равна ω_1^{CR} , далее на каждом графике указана прибавка к ω_1^{CR} в процентах от разницы $\omega_2^{\text{CR}} - \omega_1^{\text{CR}}$.

Ровно на черенковской частоте «вакуумное» дифракционное излучение пренебрежимо мало (штрихпунктирная линия практически не видна на графике «0%») и поле излучения полностью определяется первым слагаемым в формуле (37), излучение при малых углах («вперед») практически отсутствует, имеется сильное излучение «назад», т. е. при углах, близких к $\pi - \theta_\beta$. Отметим, что существенное излучение в направлении, составляющим малый угол со стенкой волновода, имеет место и при возбуждении волновода ТМ-модой [28, 33]. С ростом частоты (добавка 2-10%) «вакуумное» дифракционное излучение начинает сказываться при малых углах $\theta \sim \theta_\beta$, и при добавке в 20% оно превышает излучение «назад», обусловленное первым слагаемым в (37). При этом излучение в других направлениях (отличных от «вперед» и «назад»)

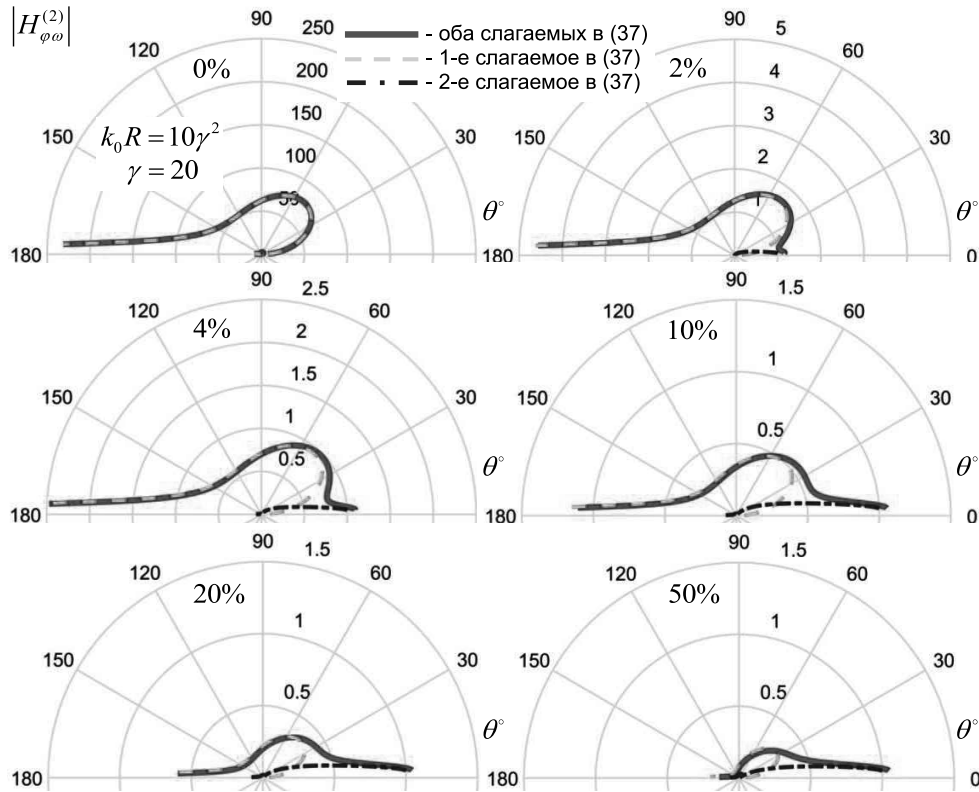


Рис. 4. (Цветной онлайн) Диаграммы направленности излучения точечного заряда при его вылете из открытого конца волновода с диэлектрическим заполнением при $\gamma = 20$ и $R = 10\gamma^2/k_0$ в диапазоне углов $\theta \in [\theta_\beta, \pi - \theta_\beta]$ на частотах, смещенных с первой черенковской частоты ω_1^{CR} на долю разности $\omega_2^{CR} - \omega_1^{CR}$, указанную в процентах на каждом графике. Сплошная (красная) линия рассчитана по формуле (37), зеленая (пунктирная) линия — вклад первого слагаемого в (37), синяя (штрихпунктирная) — вклад второго слагаемого в (37). Кривые нормированы на максимум синей (штрихпунктирной) линии. Остальные параметры те же, что и на рис. 2, $\omega_2^{CR} \approx 2\pi \cdot 109.9$ ГГц

существенно меньше. Наконец, при добавке 50% «вакуумное» дифракционное излучение практически определяет полное излучение.

На рис. 5 представлены диаграммы излучения на черенковских частотах с номерами $l = 1, 2, 5, 10$, кривые нормированы на максимум «вакуумного» дифракционного излучения (само оно не представлено ввиду пренебрежимой малости, что видно по нормировке). Также видно, что с ростом номера «черенковской» моды увеличивается угол максимума излучения в переднее полупространство и уменьшается ширина соответствующего главного лепестка. При малых l очень сильно излучение «назад», с ростом номера моды его роль уменьшается. При $l \geq 2$ имеются слабые побочные лепестки, наличие которых связано с излучением распространяющихся мод, номер которых отличен от l .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлено строгое решение задачи о дифракционном излучении равномерно движущегося точечного заряда на открытом конце круглого волновода со сплошным диэлектрическим заполнением. Решение состоит из двух компонент. Первая компонента — это дифракционное излучение на открытом конце волновода без диэлектрического заполнения, так называемое «вакуумное» дифракционное излучение. Вторую компоненту можно трактовать как переходное излучение на ограниченной кромками волновода границе раздела диэлектрик-вакуум. На частотах излучения Вавилова – Черенкова (они удовлетворяют условию $as = j_{0m}$, $m = 1, 2, \dots$) первая компонента пренебрежима мала, и диаграмма направленности излучения определяется второй компонентой, как правило она имеет ярко выраженный главный лепесток при угле

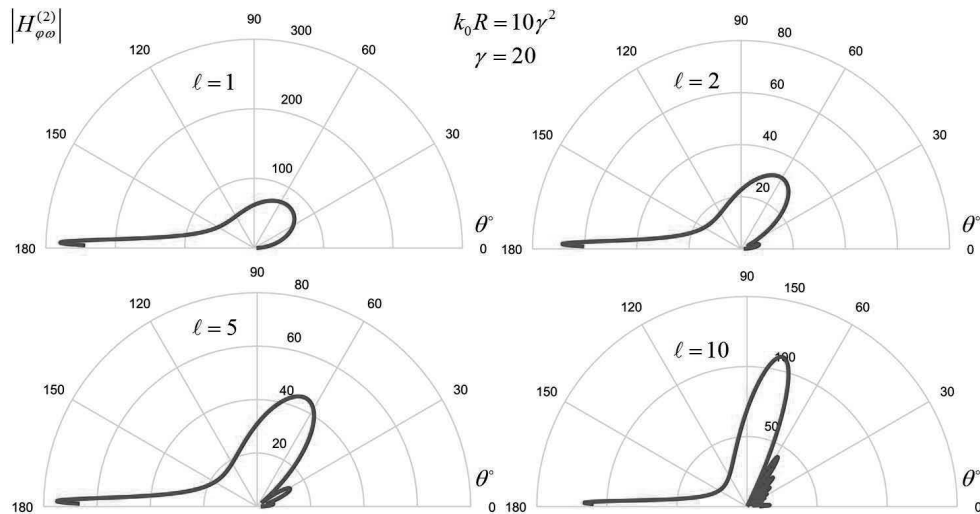


Рис. 5. Диаграммы направленности излучения точечного заряда при его вылете из открытого конца волновода с диэлектрическим заполнением при $\gamma = 20$, $R = 10\gamma^2/k_0$ на черенковской частоте с номером $l = 1, 2, 5, 10$ (номер указан на каждом графике) в диапазоне углов $\theta \in [\theta_\beta, \pi - \theta_\beta]$. Кривые рассчитаны по формуле (37) и нормированы на максимум второго слагаемого в этой формуле. Параметры задачи те же, что и на рис. 4, $\omega_5^{\text{CR}} \approx 2\pi \cdot 297.2$ ГГц, $\omega_{10}^{\text{CR}} \approx 2\pi \cdot 609.8$ ГГц

наблюдения, существенно большем нуля. Вдали от черенковских частот первая компонента доминирует и формирует диаграмму направленности с узким лепестком в окрестности оси структуры (соответствующий угол максимума по порядку величины равен обратному Лоренц-фактору заряда).

Отметим, что с точки зрения практических применений, описанных во Введении, необходимо было бы исследовать более реалистичную структуру, имеющую на оси вакуумный канал для беспрепятственного пролета заряда. Сделанное приближение об однородности диэлектрического заполнения вызвано главным образом соображениями максимально возможной простоты и наглядности изложения. Решенная в данной работе задача является необходимым первым шагом на пути решения более сложных задач, например, задачи о дифракционном излучении на открытом конце волновода с вакуумным каналом и слоем диэлектрика. Представленный метод можно без принципиальных трудностей применить как к описанной двухслойной структуре, так и к более многослойным структурам аналогично тому, как это было сделано в наших работах [28, 29, 37], где рассматривались задачи без внешнего источника с возбуждением в виде волноводной моды.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-72-10137).

ЛИТЕРАТУРА

1. B. M. Bolotovskii and G. V. Voskresenskii, *Diffraction radiation*, Usp. Fiz. Nauk, **88**, 209 (1966).
2. B. M. Bolotovskii and E. A. Galst'yan, *Diffraction and diffraction radiation*, Usp. Fiz. Nauk, **170**, 809 (2000).
3. S. Kheifets, L. Palumbo and V. G. Vaccaro, *Electromagnetic fields scattered by a charge moving on the axis of a semi-infinite circular waveguide: Radiation spectrum and longitudinal impedance*, IEEE Trans. Nucl. Science, **34**, 1094 (1987).
4. A. V. Tyukhtin, *Self-acceleration of a charge traveling into a waveguide*, Phys. Rev. ST Accel. Beams, **17**, 021303 (2014).
5. S. N. Galyamin, A. V. Tyukhtin, V. V. Vorobev, A. A. Grigoreva and A. Aryshev, *Bunch imaging at the open end of an embedded circular waveguide*, IEEE Trans. Microwave Theory Techn., **66**, 2100 (2018).

6. D. V. Karlovets and A. P. Potylitsyn, *On the theory of diffraction radiation*, Journal of Experimental and Theoretical Physics, **107**, 755 (2008).
7. D. Karlovets and A. Potylitsyn, *Generalized surface current method in the macroscopic theory of diffraction radiation*, Physics Letters A, **373**, 1988 (2009).
8. A. Potylitsyn, M. I. Ryazanov, M. N. Strikhanov and A. A. Tishchenko, *Diffraction Radiation from Relativistic Particles*, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 239 (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011).
9. M. Ivanyan, A. Grigoryan, A. Tsakanian and V. Tsakanov, *Wakefield radiation from the open end of an internally coated metallic tube*, Phys. Rev. ST Accel. Beams, **17**, 074701 (2014).
10. A. M. Altmark, A. D. Kanareykin and I. L. Sheinman, *Tunable wakefield dielectric-filled accelerating structure*, Tech. Phys., **50**, 87 (2005).
11. E. A. Nanni, W. R. Huang, K.-H. Hong, K. Ravi, A. Fallahi, G. Moriena, R. J. Dwayne Miller and F. X. Kärtner, *Terahertz-driven linear electron acceleration*, Nature Communications, **6**, 8486 (2015).
12. B. D. O'Shea, G. Andonian, S. Barber, K. Fitzmorris, S. Hakimi, J. Harrison, P. D. Hoang, M. J. Hogan, B. Naranjo, O. B. Williams, V. Yakimenko and J. Rosenzweig, *Observation of acceleration and deceleration in gigaelectron-volt-per-metre gradient dielectric wakefield accelerators*, Nature Communications, **7**, 12763 (2016).
13. D. Wang, X. Su, L. Yan, Y. Du, Q. Tian, Y. Liang, L. Niu, W. Huang, W. Gai, C. Tang and S. Antipov, *Phase control with two-beam interferometry method in a terahertz dielectric wakefield accelerator*, Appl. Phys. Lett., **111**, 174102 (2017).
14. C. Jing, S. Antipov, M. Conde, W. Gai, G. Ha, W. Liu, N. Neveu, J. Power, J. Qiu, J. Shi, D. Wang and E. Wisniewski, *Electron acceleration through two successive electron beam driven wakefield acceleration stages*, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, **898**, 72 (2018).
15. M. T. Hibberd, A. L. Healy, D. S. Lake, V. Georgiadis, E. J. H. Smith, O. J. Finlay, T. H. Pacey, J. K. Jones, Y. Saveliev, D. A. Walsh, E. W. Snedden, R. B. Appleby, G. Burt, D. M. Graham and S. P. Jamison, *Acceleration of relativistic beams using laser-generated terahertz pulses*, Nature Photonics, **14**, 755 (2020).
16. H. Tang, L. Zhao, P. Zhu, X. Zou, J. Qi, Y. Cheng, J. Qiu, X. Hu, W. Song, D. Xiang, and J. Zhang, *Stable and scalable multistage terahertz-driven particle accelerator*, Phys. Rev. Lett., **127**, 074801 (2021).
17. S. N. Galyamin, A. V. Tyukhtin, S. Antipov, and S. S. Baturin, *Terahertz radiation from an ultra-relativistic charge exiting the open end of a waveguide with a dielectric layer*, Opt. Express, **22**, 8902 (2014).
18. D. Wang, X. Su, Y. Du, Q. Tian, Y. Liang, L. Niu, W. Huang, W. Gai, L. Yan, C. Tang, and S. Antipov, *Non-perturbing THz generation at the Tsinghua university accelerator laboratory 31 MeV electron beamline*, Review of Scientific Instruments, **89**, 093301 (2018).
19. L. Zhao, H. Tang, C. Lu, T. Jiang, P. Zhu, L. Hu, W. Song, H. Wang, J. Qiu, C. Jing, S. Antipov, D. Xiang, and J. Zhang, *Femtosecond relativistic electron beam with reduced timing jitter from THz driven beam compression*, Phys. Rev. Lett., **124**, 054802 (2020).
20. S. Jiang, W. Li, Z. He, Q. Jia, and L. Wang, *Intrinsically reducing divergence angle of Cherenkov radiation from dielectric capillary*, Opt. Lett., **45**, 5416 (2020).
21. G. Voskresenskii and S. Zhurav, Radiotekhnika i Elektronika, **12**, 2608 (1976).
22. G. Voskresenskii and S. Zhurav, Radiotekhnika i Elektronika, **23**, 2505 (1978).
23. S. Koshikawa and K. Kobayashi, *Diffraction by a terminated semi-infinite parallel-plate waveguide with three-layer material loading*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, **45**, 949 (1997).
24. Y. Hameş and I. H. Tayyar, *Radiation from dielectric-filled thick-walled parallel-plate waveguide junction loaded with a dielectric half-plane*, Electromagnetics, **25**, 245 (2005).
25. R. Mittra and S. W. Lee, *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*, (Macmillan, 1971).

26. S. N. Galyamin, A. V. Tyukhtin, V. V. Vorobev, A. A. Grigoreva and A. S. Aryshev, *Cherenkov radiation of a charge exiting open-ended waveguide with dielectric filling*, Phys. Rev. Accel. Beams, **22**, 012801 (2019).
27. S. N. Galyamin, A. V. Tyukhtin and V. V. Vorobev, *Radiation from open ended waveguide with dielectric loading*, Nuclear Instr. Meth. Phys. Res. B, **402**, 144 (2017).
28. S. N. Galyamin, V. V. Vorobev and A. V. Tyukhtin, *Diffraction at the open-ended dielectric-loaded circular waveguide: Rigorous approach*, IEEE Trans. Microwave Theory Techn., **69**, 2429 (2021).
29. S. N. Galyamin and V. V. Vorobev, *Diffraction at the open end of dielectric-lined circular waveguide*, IEEE Trans. Microwave Theory and Techn., **70**, 3087 (2022).
30. I. H. Tayyar and A. Buyukaksoy, *A Wiener-Hopf analysis of the coaxial waveguide radiator*, 2011 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (2011), pp. 580–583.
31. L. Weinstein, *The Theory of Diffraction and the Factorization Method: generalized Wiener-Hopf Technique*, Golem Series in Electromagnetics, V. 3 (Golem Press, 1969).
32. L. B. Felsen and N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves* (Wiley Interscience, New Jersey, 2003).
33. Б. М. Болотовский, Д. М. Седрамян, *Излучение частицы от открытого конца волновода*, Изв. АН Арм. ССР, **17**, 119 (1964).
34. N. Sei and T. Takahashi, *First demonstration of coherent Cherenkov radiation matched to circular plane wave*, Scientific Reports, **7**, 17440 (2017).
35. P. Karataev, K. Fedorov, G. Naumenko, K. Popov, A. Potylitsyn, and A. Vukolov, *Ultra-monochromatic far-infrared Cherenkov diffraction radiation in a super-radiant regime*, Scientific Reports, **10**, 20961 (2020).
36. R. Kieffer, L. Bartnik, M. Bergamaschi, V. V. Bleko, M. Billing, L. Bobb, J. Conway, M. Forster, P. Karataev, A. S. Konkov, R. O. Jones, T. Lefevre, J. S. Markova, S. Mazzoni, Y. Padilla Fuentes, A. P. Potylitsyn, J. Shanks, and S. Wang, *Direct observation of incoherent Cherenkov diffraction radiation in the visible range*, Phys. Rev. Lett., **121**, 054802 (2018).
37. S. N. Galyamin, *Cherenkov Wakefield Radiation from an Open End of a Three-Layer Dielectric Capillary*, arXiv.org. 2022. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.03986>.