ЖЭТФ, 2024, том 165, вып. 2, стр. 276–293 © 2024

ЭКРАНИРОВАННОЕ И ВАН-ДЕР-ВААЛЬСОВСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ПЫЛЕВОЙ ПЛАЗМЕ И ЭЛЕКТРОЛИТАХ

А. В. Филиппов [a,b*]

[a] *ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований 108840, Троицк, Москва, Россия*

[b] *Объединенный институт высоких температур Российской академии наук 125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 1 сентября 2023 г.,
после переработки 20 сентября 2023 г.
Принята к публикации 20 сентября 2023 г.

Рассмотрено экранированное электростатическое взаимодействие и взаимодействие Ван-дер-Ваальса нано- и микроразмерных частиц в пылевой плазме. Электростатическое взаимодействие рассмотрено на основе линеаризованного уравнения Пуассона – Больцмана для частиц как с фиксированными зарядами, равномерно распределенным по их поверхностям, так и с фиксированными электрическими потенциалами поверхности. Найденное решение задачи позволяет исследовать взаимодействие как частиц сравнимого радиуса, так и частиц сильно отличающихся размеров. В силе взаимодействия учтена осмотическая составляющая, которая в случае постоянных зарядов приводит к восстановлению равенства сил, действующих на первую и вторую частицы. Для взаимодействия Ван-дер-Ваальса учтено экранирование статических флуктуаций и запаздывание электромагнитных полей для дисперсионной части взаимодействия. На основе анализа различных выражений для геометрического фактора с учетом запаздывания электромагнитного поля предложена численно устойчивая методика расчета этого фактора. Рассчитана полная энергия взаимодействия двух заряженных пылевых частиц при характерных для пылевой плазмы параметрах плазмы: концентрации электронов и ионов от 10^8 до 10^{12} см$^{-3}$, радиусе частиц от 10 нм до 1 мкм и зарядах частиц от 10 до 10^3 элементарных зарядов на микрон радиуса частиц.

DOI: 10.31857/S0044451024020135

1. ВВЕДЕНИЕ

Силы взаимодействия между заряженными поверхностями, коллоидными частицами, ионами и органическими молекулами, растворенными в водном электролите, играют важную роль в коллоидной физике [1], биофизике [2], в процессах электро- и фото-катализа [3], в геохимии окружающей среды [4]. Эти силы определяют стабильность коллоидных систем, динамические свойства и явления типа самосборки в них [5–7], адсорбцию ионов на поверхностях [8], адгезию частиц на границе жидкость-твердое тело [9] и многие другие свойства.

Исследования сил взаимодействия на малых расстояниях важны также в физике пылевой плазмы [10–22]. Особенно важную роль эти силы играют в процессе коагуляции частиц [23, 24]. Ее изучение имеет важное значение также для развития ряда приложений, например, индустрии производства наночастиц [25–29] и формирования из них тонких защитных пленок или пленок с уникальными физическими и химическими свойствами [30–33], при точном выделении ван-дер-ваальсовского взаимодействия на малых расстояниях [34–38], при изучении адгезии заряженных частиц [39], моделировании процесса удаления мелких пылевых частиц из воздуха с использованием различных типов газового разряда [40] и т. д.

Для описания взаимодействия микро- и наночастиц в настоящее время в основном используются приближенные подходы (см., например, обзор [41]), в которых силы электростатического и ван-дер-ваальсовского взаимодействия вычисляются

* E-mail: fav@triniti.ru

на основе приближения Дерягина [42]. Электростатическое экранированное взаимодействие при этом описываются теорией Дерягина–Ландау–Фервея–Овербика (ДЛФО) [43]. В ряде работ электростатическое взаимодействие рассматривалось более точно на основе решения линеаризованного уравнения Пуассона – Больцмана [44–53], в других развиты весьма точные методы расчета силы ван-дер-ваальсовского взаимодействия (см., например, [54]). Ниже представлено точное решение задачи электростатического взаимодействия между наночастицами на основе линеаризированного уравнения Пуассона – Больцмана, которое дополнено описанием методики расчета силы взаимодействия Ван дер Ваальса. На основе развитых подходов рассчитана полная энергия взаимодействия нано- и микрочастиц. В настоящей работе не рассматриваются силы взаимодействия, связанные с конечным размером молекул электролита, современное описание которых можно найти в работах [55–57].

Настоящая работа является продолжением работ [58, 59], в которых особое внимание было уделено случаю постоянных потенциалов поверхности частиц и их взаимодействию в электролитах при достаточно высоких концентрациях ионов и, соответственно, высоких значениях постоянной экранирования. В настоящей работе будет проведено тестирование разработанных методов вычисления силы взаимодействия с учетом экранирования плазмой путем сравнения с решением задачи о взаимодействии в вакууме [60–64]. Особое внимание будет уделено взаимодействию частиц в пылевой плазме.

2. ЭКРАНИРОВАННОЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Геометрия задачи о взаимодействии частиц в плазме с учетом эффектов экранирования приведена на рис. 1. Как и в работах [46–49], электростатическое взаимодействие в электролите будем рассматривать в рамках линеаризированной модели Пуассона – Больцмана [65]:

$$\Delta\phi = k_D^2\phi, \tag{1}$$

где ϕ — самосогласованный потенциал электрического поля, k_D — дебаевская постоянная экранирования:

$$k_D^2 = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon}\left(\frac{n_e}{T_e} + \frac{n_i z_i^2}{T_i}\right), \tag{2}$$

e — заряд протона, ε — статическая диэлектрическая проницаемость среды, n_e — концентрация электронов или отрицательных ионов, n_i, z_i — концентрация и зарядовое число положительных ионов, соответственно, T_e, T_i — температура электронов или отрицательных ионов и положительных ионов в энергетических единицах.

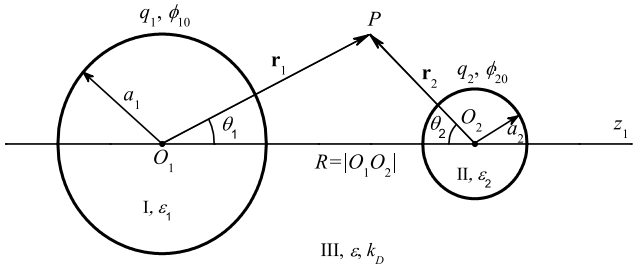

Рис. 1. Геометрия задачи о взаимодействии частиц в плазме с учетом эффектов экранирования. Здесь q_i, ϕ_{i0}, a_i, ε_i — заряд, потенциал поверхности, радиус и диэлектрическая проницаемость i-й частицы, соответственно, $i = 1, 2$, $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор точки наблюдения P, проведенный из центра i-й частицы O_i, θ_i — зенитный угол в сферической системе координат с полюсом в центре i-й частицы и осью, направленной к центру другой частицы, R — межчастичное расстояние, ε — диэлектрическая проницаемость электролита, k_D — обратная длина экранирования (постоянная экранирования) плазмы (электролита)

Общее решение уравнения Гельмгольца (1) для потенциала системы зарядов, связанных с k-й частицей в сферической системе координат с полюсом в центре этой частицы определяется выражением (см., например, [66]):

$$\phi_k = \sum_{n=0}^{\infty} A_{k,n} k_n\left(k_D r_k\right) P_n\left(\cos\theta_k\right), \tag{3}$$

где $A_{k,n}$ — коэффициенты разложения, k_n — модифицированные сферические функции Бесселя 3-го рода:

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{n+1/2}(x), \tag{4}$$

$K_{n+1/2}$ — модифицированные функции Бесселя 3-го рода (функции Макдональда) [67]. Для нахождения коэффициентов $A_{k,n}$ из граничных условий нужно найти коэффициенты переразложения потенциала i-й частицы, записанного через полиномы Лежандра с полюсом в центре этой частицы, по полиномам Лежандра с полюсом в центре другой k-й макроча-

стицы, для чего воспользуемся формулой сложения [44, 68]:

$$k_n\left(\widetilde{r}_i\right)P_n\left(\cos\theta_i\right) = \\ = \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)L_{nm}\left(\widetilde{R}\right)i_m\left(\widetilde{r}_k\right)P_m\left(\cos\theta_k\right), \quad (5)$$

где $\widetilde{r}_i = k_D r_i$, $\widetilde{r}_k = k_D r_k$, $\widetilde{R} = k_D R$, R — расстояние между центрами макрочастиц, $i = 1, 2$, $k = 3 - i$, $i_n(x)$ — модифицированные сферические функции Бесселя 1-го рода:

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}I_{n+1/2}(x), \quad (6)$$

$I_{n+1/2}$ — модифицированные функции Бесселя 1-го рода (функции Инфельда) [67], зависящие от R коэффициенты L_{mn} определены суммой

$$L_{nm}\left(\widetilde{R}\right) = \sum_{\ell=0}^{\min\{n,m\}} k_{n+m-2\ell}\left(\widetilde{R}\right)G_{nm}^{\ell}, \quad (7)$$

$$G_{nm}^{\ell} = \frac{(n+m-\ell)!\,(n+m-2\ell+1/2)}{\ell!(n-\ell)!(m-\ell)!}\times \\ \times\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(n-\ell+1/2\right)\Gamma\left(m-\ell+1/2\right)\Gamma\left(\ell+1/2\right)}{\Gamma\left(m+n-\ell+3/2\right)}, \quad (8)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция:

$$\Gamma\left(n+1/2\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n}, \quad (9)$$

$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)$. В выражении (7) и ниже с тильдой отмечены приведенные к дебаевскому радиусу величины: $\widetilde{R} = k_D R$. Отметим, что $G_{nm}^{\ell} = G_{mn}^{\ell}$ и, следовательно, $L_{nm} = L_{mn}$. (По поводу вычисления коэффициентов G_{nm}^{ℓ} см. Приложение А.

Окончательно, для потенциала i-й частицы получим выражение через полиномы Лежандра с полюсом в центре k-й макрочастицы ($i = 1, 2$, $k = 3 - i$):

$$\phi_i\left(\widetilde{r}_k, \theta_k\right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{i,m}b_{nm}\left(\widetilde{r}_k, \widetilde{R}\right)P_n\left(\cos\theta_k\right), \quad (10)$$

где коэффициенты b_{nm} определяются выражением:

$$b_{nm}\left(\widetilde{r}_k, \widetilde{R}\right) = (2n+1)\,i_n\left(\widetilde{r}_k\right)L_{mn}\left(\widetilde{R}\right). \quad (11)$$

В работах [46–49] коэффициенты b_{nm} определялись в виде двойных сумм от произведений модифицированных функций Бесселя 1-го и 3-го родов, а выражение (11) содержит только однократное суммирование при вычислении L_{mn}. Численные расчеты показали, что коэффициенты b_{nm}, вычисленные по (11) и формулам, приведенным в [46–49], совпадают в пределах ошибок вычислений с двойной точностью на компьютере.

В плазме или электролите в зависимости от параметров плазмы и частиц конденсированной дисперсной фазы может реализоваться либо режим постоянства потенциалов поверхности макрочастиц, либо режим постоянства их зарядов (подробное обсуждение данного вопроса для электролитов см. в работе [49]). Для макрочастиц радиусом 1 мкм и более и при достаточно высокой концентрации плазмы $n_i > 10^9$ см$^{-3}$ при изменении межчастичного расстояния с тепловой скоростью макрочастиц оказывается постоянным потенциал их поверхности $\phi_{i,0}$, который совпадает с плавающим потенциалом плазмы. Для наночастиц радиусом около 100 нм и меньше и при достаточно низкой концентрации плазмы $n_i < 10^9$ см$^{-3}$ реализуется режим постоянных зарядов. Поэтому в настоящей работе рассмотрим оба режима сближения нано или макрочастиц.

2.1. Режим постоянных зарядов

Граничные условия у поверхности частиц в этом случае имеют вид [69, 70]

$$\phi_{\mathrm{I}}\big|_{r_1=a_1} = (\phi_1+\phi_2)\big|_{r_1=a_1}, \\ \phi_{\mathrm{II}}\big|_{r_2=a_2} = (\phi_1+\phi_2)\big|_{r_2=a_2}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_1\left.\frac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial r_1}\right|_{r_1=a_1-0} - \varepsilon\left.\frac{\partial\left(\phi_1+\phi_2\right)}{\partial r_1}\right|_{r_1=a_1+0} = 4\pi\sigma_1, \\ \varepsilon_2\left.\frac{\partial\phi_{\mathrm{II}}}{\partial r_2}\right|_{r_2=a_2-0} - \varepsilon\left.\frac{\partial\left(\phi_1+\phi_2\right)}{\partial r_2}\right|_{r_2=a_2+0} = 4\pi\sigma_2, \quad (13)$$

где ϕ_{I}, ϕ_{II} — потенциалы электрического поля внутри 1-й и 2-й частиц, соответственно, ε_1, ε_2 — их диэлектрические проницаемости, σ_1 и σ_2 — распределения плотности заряда по их поверхностям.

Общее решение уравнения Лапласа внутри однородного диэлектрика с учетом требования конечности потенциала внутри наночастиц можно записать в виде [69, 70]

$$\phi_{\mathrm{I}}\left(r_1, \theta_1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}C_n P_n\left(\cos\theta_1\right)\tilde{r}_1^{\,n}, \\ \phi_{\mathrm{II}}\left(r_2, \theta_2\right) = \sum_{n=0}^{\infty}D_n P_n\left(\cos\theta_2\right)\tilde{r}_2^{\,n}, \quad (14)$$

где C_n, D_n — коэффициенты разложения.

Используя выражения (10) и (14), из граничных условий (12) и (13) для коэффициентов разложения потенциалов ϕ_1 и ϕ_2 получим систему уравнений ($n = 0, 1, \dots$)

$$\begin{aligned} \alpha_{1,n}A_{1,n} + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{1,nm}A_{2,m} &= \frac{4\pi}{k_D}\sigma_{1,n}, \\ \alpha_{2,n}A_{2,n} + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2,nm}A_{1,m} &= \frac{4\pi}{k_D}\sigma_{2,n}, \end{aligned} \tag{15}$$

где коэффициенты $\alpha_{i,n}$ и $\beta_{i,nm}$, $i = 1, 2$, определены соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha_{i,n} &= \varepsilon k_{n+1}\left(\tilde{a}_i\right) + \frac{n\left(\varepsilon_i - \varepsilon\right)}{\tilde{a}_i} k_n\left(\tilde{a}_i\right), \\ \beta_{i,nm} &= \frac{n\varepsilon_i}{\tilde{a}_i} b_{nm}\left(\tilde{a}_i, \tilde{R}\right) - \varepsilon \frac{\partial b_{nm}\left(\tilde{a}_i, \tilde{R}\right)}{\partial \tilde{a}_i}, \end{aligned} \tag{16}$$

$\sigma_{i,n}$ — коэффициенты разложения плотности поверхностного заряда по полиномам Лежандра:

$$\sigma_{i,n} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} P_n\left(\mu_i\right) \sigma_i\left(\mu_i\right) d\mu_i. \tag{17}$$

Здесь учтено, что в настоящей работе мы рассматриваем распределение поверхностного заряда, аксиально-симметричное относительно оси z. В случае равномерного распределения свободных зарядов будет отличным от нуля только член с $n = 0$:

$$\sigma_{i,0} = \frac{q_i}{4\pi a_i^2},\ i = 1, 2. \tag{18}$$

Перепишем систему (15), исключив из первого уравнения коэффициенты $A_{2,m}$ с помощью второго уравнения. В итоге получим

$$\begin{aligned} A_{1,n} - \sum_{k=0}^{\infty} A_{1,k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{1,nm}\beta_{2,mk}}{\alpha_{1,n}\alpha_{2,m}} &= \frac{\sigma_{1,n}}{\alpha_{1,n}} - \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{1,nm}}{\alpha_{1,n}\alpha_{2,m}} \sigma_{2,m}, &\quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{19}$$

Система уравнений (19) позволяет определить коэффициенты разложения потенциала первой частицы и, используя второе уравнение системы (15), определить коэффициенты разложения потенциала второй частицы.

Из (7), (11) и (16) видно, что величины $\beta_{i,nm}$ являются суммой, каждый член которой содержит сферическую функцию Макдональда, а именно $k_{n+m-2\ell}\left(\widetilde{R}\right)$, $\ell = 0, 1, \dots, \max\{n, m\}$, поэтому имеют общий сомножитель $\exp(-\widetilde{R})$. Следовательно, произведение $\beta_{1,nm}\beta_{2,mk}$ включает общий сомножитель $\exp(-2\widetilde{R})$. Теперь, пренебрегая членами, содержащими $\exp(-2\widetilde{R})$ и более высокие степени, из (19) и аналогичного уравнения для 2-й частицы в случае равномерной зарядки частиц можно найти

$$A_{i,n} \approx \frac{4\pi}{k_D\alpha_{i,n}}\sigma_{i,n}\delta_{n,0} - \frac{4\pi}{k_D}\frac{\beta_{i,n0}}{\alpha_{i,n}\alpha_{3-i,0}}\sigma_{3-i,0}. \tag{20}$$

Из (11) при $m = 0$ имеем

$$b_{n0}\left(\widetilde{r}_k, \widetilde{R}\right) = (2n+1)\, i_n\left(\widetilde{r}_k\right) k_n\left(\widetilde{R}\right). \tag{21}$$

Теперь, используя определения (16), получаем (см. [71])

$$\begin{aligned} A_{i,n} \approx{}& \frac{4\pi\sigma_{i,0}}{\varepsilon k_D k_1(\tilde{a}_i)}\delta_{n,0} - \\ &- \frac{4\pi\sigma_{3-i,0}}{\varepsilon k_D k_1(\tilde{a}_{3-i})}\,(2n+1)\, k_n\Big(\tilde{R}\Big) M_n\left(\tilde{a}_i, \varepsilon, \varepsilon_i\right), \end{aligned} \tag{22}$$

где M_n — функции, определенные соотношением (см. [71])

$$M_n\left(\tilde{a}_i, \varepsilon, \varepsilon_i\right) = \frac{n\left(\varepsilon_i - \varepsilon\right) i_n\left(\tilde{a}_i\right) - \varepsilon\tilde{a}_i i_{n+1}\left(\tilde{a}_i\right)}{\varepsilon\tilde{a}_i k_{n+1}\left(\tilde{a}_i\right) + n\left(\varepsilon_i - \varepsilon\right) k_n\left(\tilde{a}_i\right)}. \tag{23}$$

При $a_2 = 0$ это решение переходит в решение задачи о взаимодействии точечного заряда с диэлектрическим шаром в плазме (см. [71]). С ростом номера n значение функций i_n растут, а k_n – падают, а значение произведения $i_n(x)k_n(x)$ убывает очень медленно. О скорости убывания можно судить по соотношению [67]

$$k_n\left(x\right) i_{n+1}\left(x\right) + k_{n+1}\left(x\right) i_n\left(x\right) = \frac{\pi}{2x^2}. \tag{24}$$

Поэтому вычисление коэффициентов $A_{i,n}$ с приемлемой точностью требует учета большого числа членов. Ниже приближенное решение (22) будет использовано для определения числа учитываемых членов разложения потенциалов.

2.2. Режим постоянных потенциалов поверхности

В случае, когда характерное время зарядки частиц значительно превышает характерное время изменения расстояния между ними, реализуется режим постоянных потенциалов поверхности, которые определяются плавающим потенциалом плазмы. Отметим, что в случае проводящих частиц потенциал поверхности также является постоянным в

том смысле, что не зависит от угловых переменных, но при постоянном заряде меняется при изменении межчастичного расстояния. В режиме постоянных, не зависящих от межчастичного расстояния потенциалов поверхности частиц $\phi_{i,0}$, $i = 1, 2$, решение рассматриваемой здесь задачи заметно упрощается и для нахождения коэффициентов разложения из условия непрерывности потенциала на границе раздела диэлектрических сред [69] получим систему уравнений ($n = 0, 1, \ldots,$):

$$\begin{aligned} k_n\left(\widetilde{a}_1\right) A_{1,n} + \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}\left(\widetilde{a}_1, \widetilde{R}\right) A_{2,m} = \phi_{1,0}\delta_{n0}, \\ k_n\left(\widetilde{a}_2\right) A_{2,n} + \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}\left(\widetilde{a}_2, \widetilde{R}\right) A_{1,m} = \phi_{2,0}\delta_{n0}. \end{aligned} \tag{25}$$

Исключив $A_{2,n}$ из первого уровня с помощью второго, после перемены порядка суммирования получим

$$\begin{aligned} A_{1,n} - \sum_{k=0}^{\infty} A_{1,k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{nm}\left(\tilde{a}_1, \tilde{R}\right) b_{mk}\left(\tilde{a}_2, \tilde{R}\right)}{k_n\left(\tilde{a}_1\right) k_m\left(\tilde{a}_2\right)} = \\ = \phi_{1,0}\frac{\delta_{n0}}{k_n\left(\tilde{a}_1\right)} - \phi_{20}\frac{(2n+1)\, i_n\left(\tilde{a}_1\right) k_n\left(\tilde{R}\right)}{k_0\left(\tilde{a}_2\right) k_n\left(\tilde{a}_1\right)}. \end{aligned} \tag{26}$$

Если пренебречь членами, содержащими $\exp(-2\widetilde{R})$ и более высокие степени, то из (26) находим

$$\begin{aligned} A_{i,n} \approx \frac{\phi_{i,0}}{k_0\left(\widetilde{a}_i\right)}\delta_{n0} - \\ - (2n+1)\frac{i_n\left(\widetilde{a}_i\right) k_n\left(\widetilde{R}\right)}{k_n\left(\widetilde{a}_i\right) k_0\left(\widetilde{a}_{3-i}\right)}\phi_{3-i,0}. \end{aligned} \tag{27}$$

Заряды частиц в режиме постоянных потенциалов становятся функциями межчастичного расстояния. Из граничного условия непрерывности электрической индукции (13) для определения зарядов получим выражения

$$\begin{aligned} q_i = \varepsilon a_i \tilde{a}_i \Bigg[k_1\left(\tilde{a}_i\right) A_{i,0} - \\ - i_1\left(\tilde{a}_i\right) \sum_{m=0}^{\infty} k_m\left(\tilde{R}\right) A_{3-i,m} \Bigg], \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{28}$$

После простых преобразований с использованием (25) и соотношения (24), из (28) следует

$$\begin{aligned} q_i = \frac{\varepsilon a_i}{\sinh\left(\tilde{a}_i\right)} \Bigg\{ \frac{\pi}{2} A_{i,0} - \\ - \left[\tilde{a}_i \cosh\left(\tilde{a}_i\right) - \sinh\left(\tilde{a}_i\right)\right] \phi_{i,0} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{29}$$

Из (28) можно получить и другое выражение для определения заряда:

$$q_i = q_{i,\infty} - \varepsilon a_i e^{\tilde{a}_i} \sum_{m=0}^{\infty} k_m\left(\tilde{R}\right) A_{3-i,m}, \tag{30}$$

которое явно содержит связь заряда с потенциалом уединенной частицы:

$$q_{i,\infty} = \varepsilon a_i \phi_{i,0}\left(1 + \tilde{a}_i\right), \tag{31}$$

так как для частиц, удаленных друг от друга на большое расстояние, $R \to \infty$, их влияние друг на друга пренебрежимо мало. В этом случае из (27) следует

$$A_{i,0}^{\infty} = \frac{\phi_{i0}}{k_0\left(\tilde{a}_i\right)} = \frac{2}{\pi}\phi_{i0}\tilde{a}_i e^{\tilde{a}_i},\ i = 1, 2. \tag{32}$$

Соотношение (31) можно получить и из сравнения выражений (27) и (32), которые при $R \to \infty$ должны совпадать.

2.3. Определение силы взаимодействия

В работах [46, 47] для нахождения силы использовался максвеллов тензор натяжений

$$T_{\mathbf{n},i} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_n\mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{n}E^2\right)\Big|_{r=a_i}, \tag{33}$$

где $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности i-й частицы, $E_n = \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}$. В результате интегрирования по углам для z-составляющей силы, действующей на i-ую частицу, было получено выражение

$$\begin{aligned} F_{i,z} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \left[\Xi_{i,n-1} - \right. \\ \left. - (n-1)\Psi_{i,n-1}\right]\left[\Xi_{i,n} + (n+1)\Psi_{i,n}\right], \end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_{i,n} = A_{i,n}\left[n k_n\left(\widetilde{a}_i\right) - \widetilde{a}_i k_{n+1}\left(\widetilde{a}_i\right)\right] + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} A_{3-i,m}\widetilde{a}_i \frac{\partial b_{nm}\left(\widetilde{a}_i, \widetilde{R}\right)}{\partial \widetilde{a}_i}, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\Psi_{i,n} = A_{i,n} k_n\left(\widetilde{a}_i\right) + \sum_{m=0}^{\infty} A_{3-i,m} b_{nm}\left(\widetilde{a}_i, \widetilde{R}\right). \tag{36}$$

Отметим, что согласно рис. 1, ось z для второй частицы направлена влево.

В работах [72, 73] было предложено выражение для определения плотности поверхностных сил, связанных с осмотическим давлением на поверхности

частиц, которое в работе [74] было преобразовано в обычный максвелловский тензор натяжения:

$$T^o_{i,\alpha\beta} = -\frac{\varepsilon}{4\pi} k_D^2\ \phi^2\big|_{r=a_i}\ \delta_{\alpha\beta}, \tag{37}$$

где $\alpha, \beta = x, y, z$. Для рассматриваемой в настоящей работе задачи существенна только z-компонента максвелловского тензора натяжения:

$$T^o_{i,rz} = -\frac{\varepsilon}{4\pi} k_D^2\ \phi^2\big|_{r=a_i} \cos\theta. \tag{38}$$

Таким образом, для осмотической составляющей силы находим

$$F^o_{i,z} = \int\limits_S T_{i,rz} dS_i = -\frac{\varepsilon}{2} a_i^2 k_D^2 \int\limits_0^\pi \phi^2\big|_{r=a_i} \cos\theta \sin\theta d\theta = \\ = -\varepsilon \tilde{a}_i^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \Psi_{i,n-1} \Psi_{i,n}}{(2n-1)(2n+1)}, \tag{39}$$

где величина $\Psi_{i,n}$ определена выражением (36).

2.3.1. Постоянные заряды частиц

В случае постоянных зарядов частиц осмотическая составляющая силы отлична от нуля, поэтому складывая $F_{i,z}$ и $F^o_{i,z}$, для полной силы взаимодействия из (34) и (39) получим

$$F^t_{i,z} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \Big\{ \big[\Xi_{i,n-1} - \\ - (n-1)\Psi_{i,n-1}\big]\big[\Xi_{i,n} + (n+1)\Psi_{i,n}\big] - \\ - \tilde{a}_1^2 \Psi_{i,n-1}\Psi_{i,n} \Big\}. \tag{40}$$

Исключим производную $\partial b_{nm}/\partial \widetilde{a}_i$ в выражении (35) для $\Xi_{i,n}$ с помощью уравнений (15) и после несложных преобразований находим

$$\Xi_{i,n} = -\frac{4\pi a_i}{\varepsilon}\sigma_{i,n} + \frac{n\varepsilon_i}{\varepsilon}\Psi_{i,n}. \tag{41}$$

В итоге из (40) получим

$$F^t_{1,z} = -\frac{q_1}{a_1}\frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon}{3\varepsilon}\Psi_1 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(\varepsilon_1 - \varepsilon)\left[n\varepsilon_1 + \varepsilon(n+1)\right] - \varepsilon^2\tilde{a}_1^2}{\varepsilon(2n-1)(2n+1)} \times \\ \times n\Psi_{n-1}\Psi_n. \tag{42}$$

Далее получим выражение для силы взаимодействия при $k_D R \gg 1$, пренебрегая членами, содержащими $\exp(-2\widetilde{R})$ и более высокие степени. Используя (20) или (22), из (34) находим

$$F_{1,z} = -\frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2}\frac{1+\tilde{R}}{(1+\tilde{a}_1)(1+\tilde{a}_2)} e^{-k_D L} \times \\ \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon}\frac{\tilde{a}_1^2}{1+\tilde{a}_1}\right)^{-1}. \tag{43}$$

Из этого выражения видно неравенство сил: $F_{1,z} \neq F_{2,z}$, на что обращалось внимание в работах [46, 47]. При этом для осмотической составляющей силы (39) с той же точностью находим

$$F^o_{1,z} = -\frac{q_1 q_2}{R^2} e^{-k_D L} \frac{\left(1+\tilde{R}\right)}{(1+\tilde{a}_1)(1+\tilde{a}_2)} \times \\ \times \frac{\tilde{a}_1^2}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon)(1+\tilde{a}_1) + \varepsilon\tilde{a}_1^2}. \tag{44}$$

Суммируя (43) и (44), для полной силы находим симметричное относительно перестановки частиц, хорошо известное выражение в приближении Дерягина [43]:

$$F^D_z = -\frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2}\frac{1+\tilde{R}}{(1+\tilde{a}_1)(1+\tilde{a}_2)} e^{-k_D L}. \tag{45}$$

Это выражение можно получить и напрямую из (42).

2.3.2. Постоянные потенциалы поверхности частиц

В случае постоянных потенциалов поверхности частиц, используя выражение (25), из (36) находим

$$\Psi_{i,0} = \phi_{i,0},\ \Psi_{i,n} = 0,\ n \geq 1. \tag{46}$$

В этом случае осмотическая составляющая силы исчезает и для определения силы в случае постоянных потенциалов поверхности частиц из выражения (34) следует

$$F_{i,z} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\Xi_{i,n-1}\Xi_{i,n}}{(2n-1)(2n+1)}. \tag{47}$$

Для величины Ξ_n, используя свойства модифицированных сферических функций Бесселя [67] и первое уравнение системы (25), можно получить

$$\Xi_n = \tilde{a}_1 \frac{i_{n+1}(\tilde{a}_1)}{i_n(\tilde{a}_1)}\phi_{10}\delta_{n0} - \frac{\pi}{2\tilde{a}_1 i_n(\tilde{a}_1)} A_{1,n}. \tag{48}$$

В итоге, выражение для силы (47) принимает вид

$$F_{i,z} = -\varepsilon\frac{\pi}{6}\frac{A_{1,1}}{i_0\left(\tilde{a}_1\right)}\phi_{1,0} + \varepsilon\left(\frac{\pi}{2\tilde{a}_1}\right)^2 \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}\frac{A_{1,n-1}A_{1,n}}{i_{n-1}\left(\tilde{a}_1\right)i_n\left(\tilde{a}_1\right)}. \quad (49)$$

На больших расстояниях при выполнении условия $k_D R \gg 1$, пренебрегая членами, содержащими $\exp(-2\widetilde{R})$ и более высокие степени, используя (27), из (49) находим хорошо известное выражение для силы в приближении Дерягина [43]:

$$F_{\mathrm{DLVO}} = -\varepsilon\phi_{1,0}\phi_{2,0}\frac{\pi}{2}\frac{k_1\left(\tilde{R}\right)}{k_0\left(\tilde{a}_1\right)k_0\left(\tilde{a}_2\right)} \equiv \\ \equiv -\varepsilon\phi_{1,0}\phi_{2,0}\frac{a_1a_2}{R^2}\left(1+k_DR\right)e^{-k_DL}, \quad (50)$$

где $L = R - a_1 - a_2$.

На рис. 2 проводится сравнение силы взаимодействия двух частиц одного (a) и разных радиусов (b) при различных плотностях плазмы от $n_e = n_i = 10^8$ до 10^{12} см$^{-3}$ с силой взаимодействия в вакууме ($\varepsilon = 1$). Видно, что при малой плотности плазмы на малых расстояниях эффекты экранирования пренебрежимо малы и сила электростатического взаимодействия в плазме практически не отличается от силы электростатического взаимодействия в вакууме. По мере увеличения плотности плазмы эффект экранирования возрастает и проявляется уже на малых расстояниях между поверхностями частиц.

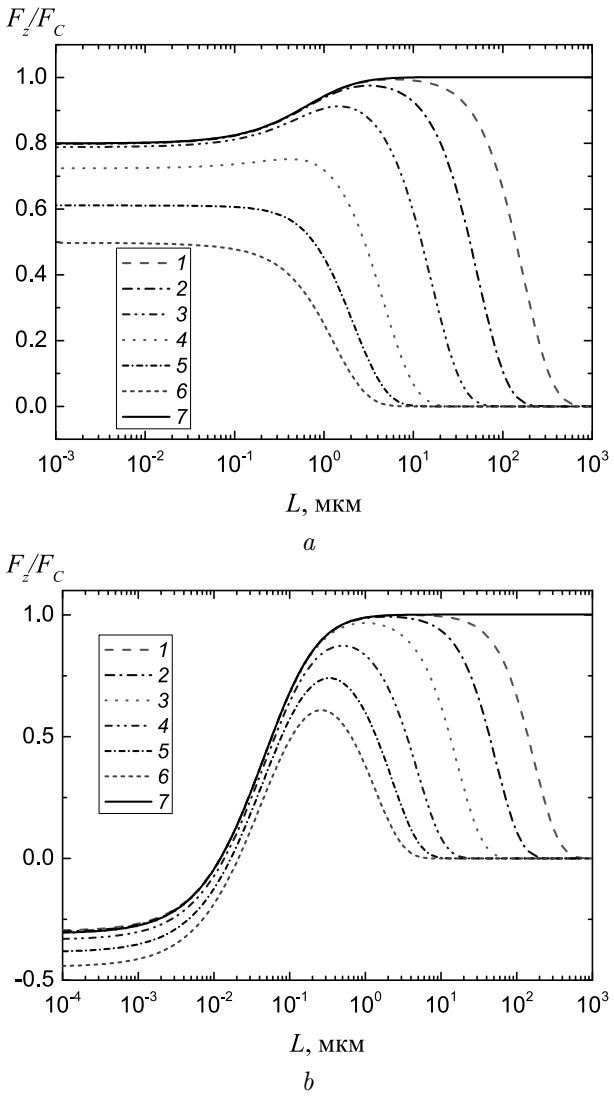

Рис. 2. Зависимости приведенной к кулоновской $F_C = q_1q_2/R^2$ силы взаимодействия F_z двух частиц при $T_e = T_i = 300$ K, $a_1 = a_2 = 1$ мкм, $q_1 = q_2 = 100e$ (a) и $a_1 = 1$ мкм, $a_2 = 100$ нм, $q_1 = 100e$, $q_2 = 10e$ (b) при разных концентрациях электронов и ионов в плазме (в скобках указан дебаевский радиус $R_D = 1/k_D$ в мкм): *1* — $n_e = 10^8$ (84.6), *2* — 10^9 (26.7), *3* — 10^{10} (8.46), *4* — 10^{11} (2.67), *5* — $4\cdot10^{11}$ (1.34), *6* — 10^{12} см$^{-3}$ (0.85), *7* — в вакууме

2.4. Потенциал электростатического взаимодействия частиц

После интегрирования (50) и (45) получим хорошо известные выражения для электростатического потенциала в приближении Дерягина [43]:

$$U_D = \varepsilon\phi_{1,0}\phi_{2,0}\frac{a_1a_2}{R}e^{-\widetilde{L}} = \\ = \frac{q_1q_2}{\varepsilon R}\frac{e^{-k_DL}}{\left(1+\tilde{a}_1\right)\left(1+\tilde{a}_2\right)}. \quad (51)$$

Переход от одной формулы к другой легко осуществляется с помощью соотношения (31).

В работе [72] на основе термодинамических соображений было предложено выражение для свободной энергии или потенциала взаимодействия частиц:

$$U\left(R\right) + U_\infty = \\ = \int\limits_{S_1+S_2}\left[Q_s\left(\phi_s, r_s\right) - \frac{1}{2}\phi_s\sigma_s\left(\phi_s, r_s\right)\right]dS, \quad (52)$$

где ϕ_s — потенциал поверхности частиц, в общем случае зависящий от угловых переменных сферической системы координат с полюсом в центре частицы: $\phi_s = \phi_s\left(\theta,\varphi\right)$, r_s — радиальная координата поверхности частиц, σ_s — плотность поверхностного заряда: $\sigma_s = \sigma_s\left(\theta,\varphi\right)$, U_∞ — обеспечивает обнуление потенциала взаимодействия при R_∞, Q_s — функци-

ональный интеграл:

$$Q_s\left(\phi_s, r_s\right) = \int^{\phi_s} d\phi'_s \sigma_s\left(\phi'_s, r_s\right). \tag{53}$$

Интегрирование в (52) ведется по поверхности первой S_1 и второй частиц S_2.

2.4.1. Постоянные заряды частиц

В случае равномерной и фиксированной плотности свободного поверхностного заряда интегрирование (53) дает $Q_s = \phi_s\sigma_s$ и из (52) следует

$$U\left(R\right) = \frac{1}{2}\left[2\pi a_1^2\sigma_1 \int\limits_{-1}^{1} \left(\phi_1 + \phi_2\right)|_{r=a_1}\, d\mu_1 + \right.$$
$$\left. + \, 2\pi a_2^2\sigma_2 \int\limits_{-1}^{1} \left(\phi_1 + \phi_2\right)|_{r_2=a_2}\, d\mu_2\right] - U_\infty. \tag{54}$$

Отсюда, используя выражения (3) и (10), выраженные в соответствующей каждой из частиц системе координат, получим:

$$U_\sigma\left(R\right) = \frac{1}{2}\left[q_1\left(\phi_{1,s} - \phi_{1,\infty}\right) + q_2\left(\phi_{2.s} - \phi_{2,\infty}\right)\right], \tag{55}$$

где $\phi_{i,s}$ — усредненный по угловым переменным потенциал поверхности i-й частицы:

$$\phi_{i,s}\left(R\right) = k_0\left(\tilde{a}_i\right) A_{i,0} + \sum_{m=0}^{\infty} b_{0m}\left(\tilde{a}_i, \tilde{R}\right) A_{3-i,m}, \tag{56}$$

$\phi_{i,\infty}$ — потенциал поверхности частицы при бесконечном удалении друг от друга, который определяется выражением, аналогичным соотношению (31):

$$\phi_{i,\infty} = \frac{q_i}{\varepsilon a_i}\frac{1}{\left(1 + \tilde{a}_i\right)}. \tag{57}$$

Отметим, что вычисление потенциала взаимодействия из (55) заметно упрощается при использовании соотношения

$$\phi_{i,s}\left(R\right) - \phi_{i,\infty} = \frac{A_{i,0} - A_{i,0}^{\infty}}{i_1\left(\tilde{a}_i\right)}\frac{\pi}{2\tilde{a}_i^2},$$
$$A_{i,0}^{\infty} = \frac{2}{\pi}\frac{q_i}{k_D\varepsilon\left(1 + \tilde{a}_i\right)} e_i^{\tilde{a}}. \tag{58}$$

На больших расстояниях разность (58) выходит на асимптотику ДЛФО-потенциала

$$\phi_{1,s}^{D}\left(R\right) - \phi_{1,\infty} = \frac{q_2}{\varepsilon\left(1 + \tilde{a}_1\right)\left(1 + \tilde{a}_2\right)R} e^{-\tilde{R} + \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2}.$$

2.4.2. Постоянные потенциалы поверхности частиц

В случае постоянных потенциалов поверхности из (53) следует, что $Q_s = 0$ и в этом случае для определения потенциала взаимодействия имеем выражение:

$$U_\phi\left(R\right) - U_\infty$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\int\limits_{S_1} \phi_{1,0}\sigma_1 dS_1 + \int\limits_{S_2} \phi_{2,0}\sigma_2 dS_2\right]. \tag{59}$$

Интегрирование (59) приводит к следующему выражению для определения электростатического потенциала взаимодействия в случае постоянных потенциалов поверхности частиц:

$$U_\phi\left(R\right) = -\frac{1}{2}\Big\{\phi_{1,0}\left[q_1\left(R\right) - q_{1\infty}\right]$$
$$+ \phi_{2,0}\left[q_2\left(R\right) - q_{2\infty}\right]\Big\}, \tag{60}$$

где $q_{1,\infty}$, $q_{2,\infty}$ — заряды частиц при $R = \infty$ [см. выражение (31)].

Численные расчеты показали, что значения потенциала электростатического взаимодействия, определенные из выражений (58) или (60) и найденные путем интегрирования зависимости силы взаимодействия от расстояния между частицами, отличаются не более чем точность решения уравнений (15) или (25) методом LU-разложения [75].

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Теория взаимодействия твердых тел за счет флуктуаций электрического поля начала развиваться с работы [76], в которой путем суммирования ван-дер-ваальсовского парного взаимодействия всех атомов, составляющих тела, было получено выражение для потенциала взаимодействия твердых тел. В работе [77] были найдены потенциалы взаимодействия атома с идеально проводящей стенкой и с другим атомом с учетом запаздывания электромагнитного поля. В работе [78] была построена более точная теория взаимодействия двух бесконечных плоских диэлектриков, разделенных вакуумом, а в работе [79] — разделенных жидкостью. Общая теория ван-дер-ваальсовского взаимодействия изложена во многих работах (см., например, работы [80–82]).

Сегодня, ввиду сложности теории в общем случае, для определения постоянной Гамакера для вза-

имодействия 1-й диэлектрик–жидкость (вакуум)–2-й диэлектрик используется выражение

$$A_{132} = \frac{3\hbar}{4\pi}\int\limits_0^\infty \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_3)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}d\xi, \qquad (61)$$

полученное в работе [79] и справедливое при пренебрежимо малых расстояниях между диэлектриками. Здесь ε_1, ε_2, ε_3 — диэлектрические проницаемости тел и жидкой (газовой) среды, частотные зависимости которых берутся при мнимой частоте $i\xi$.

Потенциал ван-дер-ваальского взаимодействия в диэлектрической жидкости двух диэлектрических частиц сферической формы без учета эффектов запаздывания методом, близким к использованному в работе [78], был получен в работе [83] для случая $L \ll a_1, a_2$:

$$U_{vdW} = -\frac{2\pi a_1 a_2 L}{(a_1+a_2)}\frac{A_{131}}{12\pi L^2}, \qquad (62)$$

где A_{131} — постоянная Гамакера, определенная соотношением (61). В работе [83] получен и следующий член приближения, который требует расчета аналога постоянной Гамакера по отличной от (61) формуле.

В настоящей работе потенциал взаимодействия Ван-дер-Ваальса определялся согласно работе [54] по формуле

$$U_{vdW} = -\frac{1}{12}\left(A_0 f_{sh} F_H + A_1 F_g\right), \qquad (63)$$

где A_0 — вклад нулевых колебаний в постоянную Гамакера, который экранируется, но не испытывает эффектов запаздывания, A_1 — дисперсионный вклад в постоянную Гамакера, который запаздывает, но не экранируется, f_{sh} — экранирующий фактор, F_H — геометрический фактор Гамакера, F_g — геометрический фактор с учетом запаздывания флуктуирующего электромагнитного поля. Вклад нулевых колебаний (константа A_0) и дисперсионный вклад (константа A_1) в константу Гамакера вычислялись согласно работам [54, 84]:

$$A_0 = \frac{3}{4}k_B T\left[\frac{\varepsilon_1(0)-\varepsilon_2(0)}{\varepsilon_1(0)+\varepsilon_2(0)}\right]^2, \qquad (64)$$

$$A_1 = \frac{3\hbar}{64}\frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{n_m^{7/2}}\times \\ \times\frac{X^2 n_m^2 + 2X\Delta\epsilon_0 n_m + \Delta\epsilon_0^2(3+2Y)}{\left(\sqrt{Y-\sqrt{Y^2-1}}+\sqrt{Y+\sqrt{Y^2-1}}\right)^3}, \qquad (65)$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, $\varepsilon_1(0)$ и $\varepsilon_2(0)$ — статические диэлектрические проницаемости сред 1 и 2, n_{01} и n_{02} — коэффициенты преломления, ω_1 и ω_2 — частоты поглощения, величины n_m, $\Delta\epsilon_0$, X и Y определены соотношениями

$$n_m^2 = \frac{1}{2}\left(n_{01}^2+n_{02}^2\right), \quad \Delta\epsilon_0 = n_{01}^2 - n_{02}^2, \qquad (66)$$

$$X = \frac{\omega_1}{\omega_2}(n_{01}^2-1) - \frac{\omega_2}{\omega_1}(n_{02}^2-1), \\ Y = \frac{1}{4\sqrt{n_m}}\left[\frac{\omega_1}{\omega_2}(n_{01}^2+1) + \frac{\omega_2}{\omega_1}(n_{02}^2+1)\right]. \qquad (67)$$

Экранирующий фактор в (63) определялся выражением [54]

$$f_{sc} = (1+2k_D L)\exp(-2k_D L). \qquad (68)$$

Геометрический фактор Гамакера в выражении (63) вычислялся согласно выражению [76]

$$F_H = \left[4a_1a_2\left(\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}\right) + 2\ln\frac{D_1}{D_2}\right]. \qquad (69)$$

Вычислению геометрического фактора с учетом запаздывания посвящено ряд работ, среди которых остановимся на следующих. Все они базируются на тех или иных аппроксимациях вклада эффектов запаздывания в потенциал взаимодействия атомов, построенные на основе работы [77]. В работе [85] была предложена аппроксмация в виде

$$0 < p \le 3, \quad f(p) = 1.01 - 0.14p, \\ p \ge 3, \quad f(p) = \frac{2.45}{p} - \frac{2.04}{p^2}, \qquad (70)$$

где $p = 2\pi r/\lambda_0$, r — расстояние между атомами. На основе этой аппроксимации в работе [86] было предложены следующие формулы для расчета геометрического фактора с учетом запаздывания:

$$F_{g,s} = 2a_s\left[2a_1a_2\left(\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}\right)+\ln\frac{D_1}{D_2}\right] + \\ + \frac{2b_s}{R}\left[8a_1a_2 + (D_1+D_2)\ln\frac{D_1}{D_2}\right], \quad L \le L_s; \qquad (71)$$

$$F_{g,L} = \frac{2a_L}{5R}\left[4a_1a_2\left(\frac{z_+^2}{D_1^2}+\frac{z_-^2}{D_2^2}\right) - \frac{2\left(z_+^2-a_1a_2\right)}{D_1} + \right. \\ + \frac{2\left(z_-^2+a_1a_2\right)}{D_2} + \ln\frac{D_2}{D_1}\Bigg] + \frac{2b_L}{15}\left[\frac{1}{D_2}-\frac{1}{D_1} + \right. \\ + \frac{2\left(z_+^2-a_1a_2\right)}{D_1^2} - \frac{2\left(z_-^2+a_1a_2\right)}{D_2^2} - \\ \left. - 8a_1a_2\left(\frac{z_+^2}{D_1^3}+\frac{z_-^2}{D_2^3}\right)\right], \quad L > L_s; \qquad (72)$$

где $a_s = 1.01$, $b_s = 0.28\pi/\lambda_0$, $a_L = 2.45\lambda_0/2\pi$, $b_L = 2.04(\lambda_0/2\pi)^2$, $z_\pm = a_1 \pm a_2$, величины D_1 и D_2 определены выражениями

$$D_1 = R^2 - z_+^2, \quad D_2 = R^2 - z_-^2. \tag{73}$$

Межчастичное расстояние перехода от формулы (71) к (72) в работе [86] предлагалось определять по формуле

$$L_s = 109 - 107\lg\left(\sqrt{a_1 a_2}\right) + \\ + 37.5\left[\lg\left(\sqrt{a_1 a_2}\right)\right]^2 - 4.5\left[\lg\left(\sqrt{a_1 a_2}\right)\right]^3 \tag{74}$$

где a_1, a_2 и L_s выражены в нанометрах. Отметим, что из-за зависимости значения L_s от радиусов наночастиц, при переходе от (71) к (72) может происходить небольшой скачок геометрического фактора (см. ниже).

В работе [87] также использовалась аппроксимация (70) и были получены пять различных формул для геометрического фактора для пяти интервалов расстояний в общем случае частиц разного радиуса. Анализ показал, что для крайних интервалов со стороны малых и больших расстояний полученные формулы совпадают с формулами из работы [86], но формулы для внутренних интервалов содержат ошибки, о чем уже отмечалось в работе [54].

В работе [88] использовалась аппроксимация в виде

$$f(p) = \frac{c}{p + c}, \quad c = \frac{3.1\lambda_0}{2\pi}, \tag{75}$$

и было получено достаточно длинное выражение для геометрического фактора с учетом эффектов запаздывания.

В работе [89] использовалась аппроксимация в виде

$$f(p) = \frac{L_b}{\sqrt{r^2 + L_b^2}}, \quad L_b = \frac{23}{3\pi}\frac{\lambda_0}{2\pi}, \tag{76}$$

и было получено выражение для геометрического фактора с учетом эффектов запаздывания для частиц равного размера. Полученное в [89] выражение можно легко обобщить на более точную аппроксимацию запаздывающего фактора, предложенное в этой же работе:

$$f(p) = \frac{\xi_1 L_{b,1}}{\sqrt{r^2 + L_{b,1}^2}} + \frac{\xi_2 L_{b,2}}{\sqrt{r^2 + L_{b,2}^2}}, \\ \xi_1 = 0.462,\ L_{b,1} = 0.485 L_b, \\ \xi_2 = 0.538,\ L_{b,2} = 1.443 L_b. \tag{77}$$

(О ряде других форм аппроксимации запаздывающего фактора см. в [90]). Формула для расчета геометрического фактора, полученная в настоящей работе в рамках модели, предложенной в работе [89], приведена в Приложении В.

На рис. 3 проводится сравнение значений геометрического фактора с учетом запаздывания из работ [86, 88] и посчитанных из выражения (86) с фактором запаздывания (77), предложенным в работе [89]. Из анализа представленных данных можно сделать следующие выводы.

1. При малых значениях радиусов частиц (примерно до 100 нм) все три набора данных приводят к практически совпадающим значениям геометрического фактора до $L < 10^3 - 10^4$ нм, при этом относительная ошибка не превышает 15%.

2. Для частиц с радиусом около 1 мкм видно заметное отличие расчетов согласно работе [86] в окрестности точки перехода L_s от одной формулы (71) к другой (72). Из сравнения кривых *6* и *7* видно, что невозможно обеспечить плавный переход с одной формулы на другую. При этом данные согласно работе [88] и полученные из (86) снова практически совпадают и относительная ошибка снова не превышает 15%.

3. После области перехода все три работы приводят к отличающимся не больше чем на 15% значениям геометрического фактора.

4. При больших значениях $L > 10^3 - 10^4$ нм вычисления геометрического фактора согласно работе [88] и из выражения (86) теряют свою точность и неприемлемы для вычислений. Это же происходит и при вычислениях по формулам из работы [86], но при значениях межчастичного расстояния, больших на порядок. Потеря точности вычислений вызвана тем, что геометрический фактор вычисляется как разность нескольких величин, превосходящих искомое значение на много порядков величин. Это может приводить (и приводит, как видно из рис. 3) к неправильному знаку геометрического фактора даже при вычислениях с числами с двойной точностью. Например, выражение (72) содержит члены, убывающие как R^{-3}, а геометрический фактор на больших расстояниях убывает как R^{-7} (см. ниже).

Отметим, что сам подход, использованный в работах [86–89], в котором суммируется взаимодействие каждого атома одной частицы с каждым атомом другой, не позволяет получить точные значения геометрического фактора с учетом запаздывания и ошибка может достигать 15%, о чем можно судить из сравнения факторов запаздывания для взаимо-

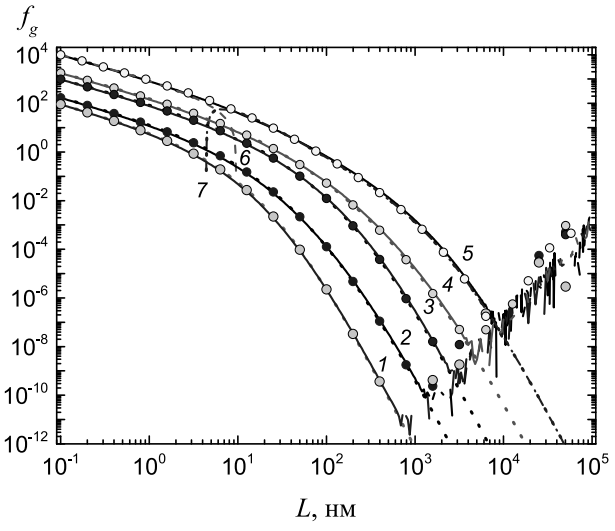

Рис. 3. Зависимости геометрического фактора f_g от L согласно работам [88] (сплошные линии), [86] (точечные линии) и рассчитанных из (86) (черные кружки) при разных размерах частиц: кривая *1* — $a_1 = a_2 = 10$ нм, *2* — $a_1 = 10$ нм, $a_2 = 100$ нм, *3* — $a_1 = a_2 = 100$ нм, *4* — $a_1 = 100$ нм, $a_2 = 1$ мкм, *5* — $a_1 = a_2 = 1$ мкм. Кривая *6* — выражение (71), *7* — (72)

действия атом-атом и атом-плоскость в работе [77] (см. также [85]).

При вычислении геометрического фактора по формуле (72) при выполнении условия $(a_1^2 + a_2^2)/R^2 \ll 1$ возникают отмеченные выше трудности, поэтому представим эту формулу в виде суммы ряда:

$$F_{g,L} = \frac{64a_1^3a_2^3}{5R^7} \times \\ \times \sum_{n=0} \frac{(n+2)\,(n+3)\,(2n+5)}{R^{2n}} \left(\frac{a_L}{n+3} - \frac{b_L}{3R} \right) \times \\ \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)\,(n-k+1)\,(2n+3)!}{(2k+3)!\,(2n-2k+3)!} a_1^{2k} a_2^{2n-2k}. \quad (78)$$

Из (78) видно, что на больших расстояниях потенциал ван дер Ваальсовского взаимодействия убывает как R^{-7}. Отметим, что при выполнении условия $(a_1^2 + a_2^2)/R^2 \leq 10^{-3}$, первые два члена ряда (78) с $n = 0$ и 1:

$$F_{g,L} \approx \frac{64a_1^3a_2^3}{3R^7} \left[\left(a_L - \frac{b_L}{R} \right) + \right. \\ \left. + \frac{7}{5} \left(3a_L - \frac{4b_L}{R} \right) \left(\frac{a_1^2}{R^2} + \frac{a_2^2}{R^2} \right) \right], \quad (79)$$

обеспечивают относительную точность вычислений на уровне 10^{-6}.

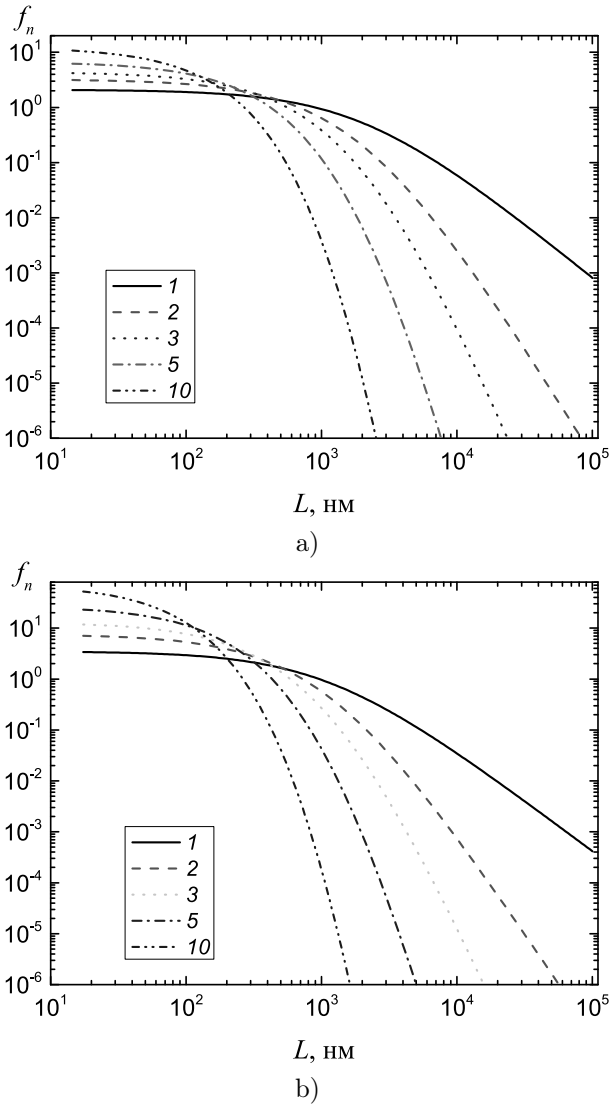

Рис. 4. Отношение слагаемого с номером n к слагаемому с номером $n = 0$ в сумме (78) для $a_1 = a_2 = 1$ мкм (a) и $a_1 = 100$ нм, $a_2 = 1$ мкм (b). Номера кривых соответствуют значению n

На рис. 4 показана зависимость отношения члена ряда (78) с номером n к нулевому члену $n = 0$. Видно, что с ростом межчастичного расстояния члены ряда с высоким номером n быстро убывают.

В свете сказанного в настоящей работе принята следующая процедура вычисления геометрического фактора с учетом запаздывания.

1. При $L \leq L_1 = 3\lambda_0/2\pi$ геометрический фактор с учетом запаздывания вычислялся согласно работе [88].

2. При $L > L_1$ (при этом для любой пары атомов параметр $p > 3$ и справедлива вторая формула

(70)) геометрический фактор с учетом запаздывания вычислялся из выражения (72) с новыми значениями параметров a_L и b_L, определенными из условия непрерывности геометрического фактора и его производной в точке сшивания $L = L_1$.

3. При $L > L_2$, где

$$L_2 = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{\delta} - (a_1 + a_2),$$

геометрический фактор вычислялся по формуле (79). При $L > L_2$ отношение $(a_1^2 + a_2^2)/R^2$ станет меньше δ и отбрасываемый член в ряде (78) будет порядка δ^2. В настоящей работе задавалось $\delta = 10^{-5}$, чтобы обеспечить хорошую точность и при определении силы взаимодействия.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе полагалось, что $\omega_1 \approx \omega_{UV1}$, $\omega_2 \approx \omega_{UV2}$, где ω_{UV1} и ω_{UV2} — границы зон поглощения в ультрафиолетовой области материала наночастиц и жидкости (плазмообразующего газа), в которой наночастицы находятся. В качестве плазмообразующего газа в настоящей работе рассматривается аргон, который широко используется в исследованиях пылевой плазмы [10–22]. Для аргона $\varepsilon_2(0) \approx 1$, $\omega_{UV2} = 1.767 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$, $n_{02}^2 = 1.000282$, $\lambda_0 = 106.66$ нм [91]. В основном в настоящей работе будут рассматриваться сферические частицы из полистирола, для которого необходимые данные хорошо известны: при 20°C $\varepsilon_1(0) = 2.557$, $\omega_{UV1} = 1.432 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$, $n_{01}^2 = 1.447$ [54]. В экспериментах по исследованию пылевой плазмы и электролитов также используются сферические частицы из полиметилметакрилата (PMMA), для которого при 25°C $\varepsilon_1(0) = 3.6$, $\omega_{UV1} = 6.3 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, $n_{01}^2 = 1.492$ и сферические частицы из кварца со свойствами: $\varepsilon_1(0) = 3.81$, $n_{01}^2 = 2.098$, $\omega_{UV1} = 2.033 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$.

Система уравнений (19) в случае постоянных зарядов или (26) в случае постоянных потенциалов поверхности частиц решалась численно методом LU-декомпозиции [75]. Учитывалось $n_{\max,1}$ членов разложения потенциала 1-й частицы и $n_{\max,2}$ членов для 2-й частицы, что обеспечивало достижение заданной точности. Необходимое число членов разложения в случае постоянных зарядов определялись из условия (см. выражения (22) и (23)):

$$(2n+1)\frac{K_n(\widetilde{R})}{k_1(\widetilde{a}_{3-i})} M_n\left(\widetilde{a}_i, \varepsilon, \varepsilon_i\right) \le \delta \quad \text{при } n \ge n_{\max,i}, \quad i = 1, 2, \quad (80)$$

а в случае постоянных потенциалов из условий (см. выражение (27))

$$(2n+1)\frac{i_n\left(\tilde{a}_i\right) k_n\left(\tilde{R}\right)}{k_n\left(\tilde{a}_i\right) k_0\left(\tilde{a}_{3-i}\right)} \le \delta \text{ for } n \ge n_{\max,i}, \quad i = 1, 2. \quad (81)$$

В настоящей работе принято, что $\delta = 10^{-181}$. Процедура вычисления функций Бесселя описана в Приложении C.

На рис. 5 проводится сравнение зависимостей полной энергии взаимодействия $U_t = U_{12} + U_{vdW}$ от расстояния между их поверхностями при разных значениях концентрации электронов и ионов. Видно, что потенциальный барьер является очень высоким и его высота падает с ростом концентрации. На малых расстояниях между частицами преобладает притяжение за счет взаимодействия ван дер Ваальса, при этом электростатическое взаимодействие между одинаковыми частицами с равными зарядами оказывается отталкивательным на всех расстояниях между частицами. В пылевой плазме заряд частиц оказывается примерно на уровне 10^3 зарядов электрона на микрон радиуса частиц [10, 11, 92, 93], поэтому потенциальный барьер в этих условиях будет подавлять коагуляцию частиц одного размера.

На рис. 6 приведены зависимости полной энергии взаимодействия одинаковых частиц при различных значениях их заряда. Хорошо видно, что высота потенциального барьера практически исчезает по мере уменьшения заряда частиц. Как видно из рис. 7, уменьшение радиуса одной из частиц (при пропорциональности заряда радиусу) также приводит к заметному снижению высоты потенциального барьера.

На рис. 8 исследуется вопрос о влиянии отклонения заряда частиц от линейной зависимости от их радиуса. Видно, что при одном и том же значении произведения $q_1 q_2$ нарушение линейной зависимости приводит к появлению электростатического притяжения между частицами, а полное взаимодействие оказывается слабо чувствительным к этому.

На рис. 5–8 зависимости U_{12} от L обозначены штрих-пунктирными линиями.

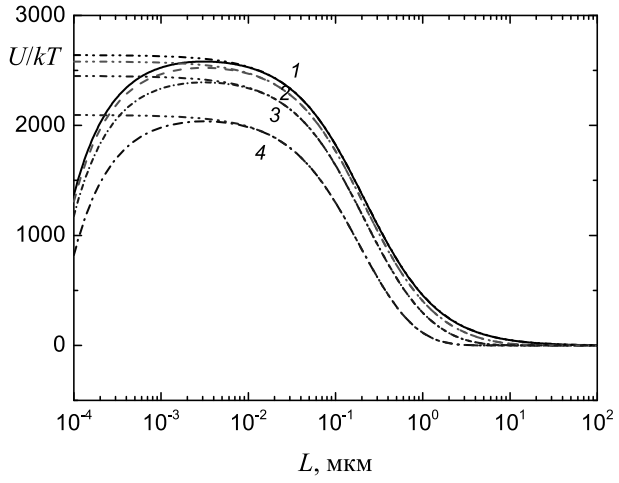

Рис. 5. Полная энергия взаимодействия частиц из полистирола радиусом $a_1 = a_2 = 100$ нм, зарядами $q_1 = q_2 = 100e$ в плазме аргона с разной плотностью заряженных частиц: кривая *1* — $n_e = n_i = 10^8$ см$^{-3}$, *2* — 10^{10} см$^{-3}$, *3* — 10^{11} см$^{-3}$,*4* — 10^{12} см$^{-3}$

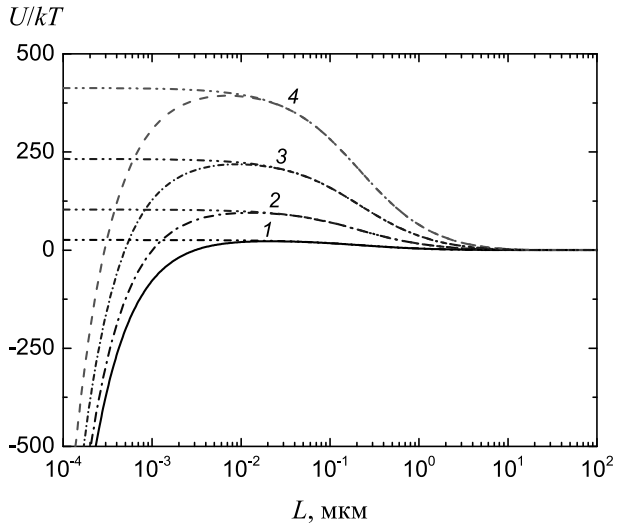

Рис. 6. Полная энергия взаимодействия частиц из полистирола в плазме аргона при $n_e = n_i = 10^{10}$ см$^{-3}$, $a_1 = a_2 = 100$ нм при различных значениях заряда: кривая *1* — $q_1 = q_2 = 10e$, *2* — $q_1 = q_2 = 20e$, *3* — $q_1 = q_2 = 30e$, *4* — $q_1 = q_2 = 40e$

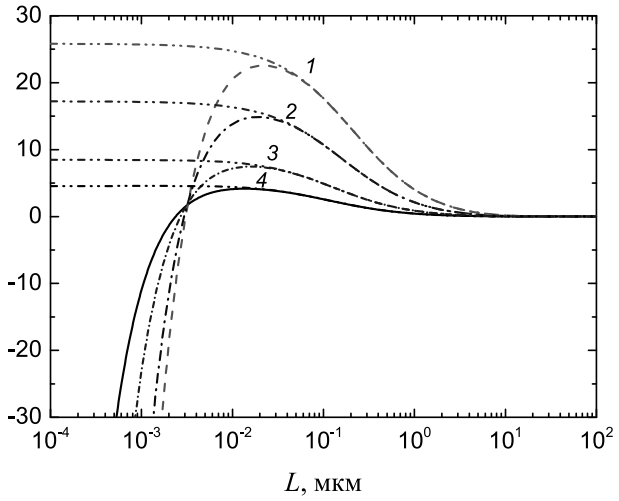

Рис. 7. Полная энергия взаимодействия частиц из полистирола в плазме аргона при $n_e = n_i = 10^{10}$ см$^{-3}$, $a_2 = 100$ нм, $q_2 = 10e$ при различных значениях радиуса и заряда 1-й частицы: кривая *1* — $a_1 = 100$ нм, $q_1 = 10e$, *2* — $a_1 = 50$ нм, $q_1 = 5e$, *3* — $a_1 = 20$ нм, $q_1 = 2e$, *4* — $a_1 = 10$ нм, $q_1 = 1e$

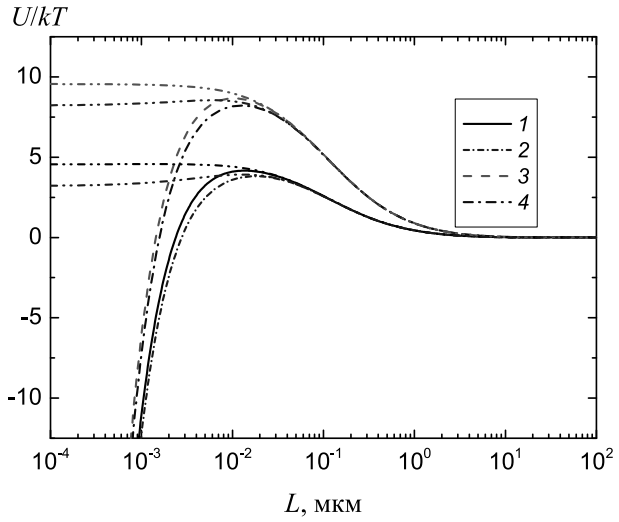

Рис. 8. Полная энергия взаимодействия частиц из полистирола в плазме аргона при $n_e = n_i = 10^{10}$ см$^{-3}$, $a_1 = 10$ нм, $a_2 = 100$ нм, при отклонении от линейной зависимости заряда частиц от их радиуса: кривая *1* — $q_1 = 1e$ нм, $q_2 = 10e$, *2* — $q_1 = 2e$ нм, $q_2 = 5e$, *3* — $q_1 = 1e$ нм, $q_2 = 20e$, *4* — $q_1 = 2e$ нм, $q_2 = 10e$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование экранированного электростатическое взаимодействия и взаимодействия Ван-дер-Ваальса диэлектрических частиц показало, что при характерных для пылевой плазмы зарядах частиц порядка 10^3 зарядов электрона на микрон радиуса частиц суммарный потенциал взаимодействия имеет достаточно высокий барьер, который сильно препятствует сближению и коагуляции частиц сравнимых размеров в пылевой плазме. Уменьшение радиуса одной из частиц в паре приводит к заметному снижению высоты потенциального барьера. Также, нарушение линейной зависимости заряда от радиуса частиц приводит

к некоторому снижению высоты потенциального барьера, что необходимо учитывать при моделировании процессов коагуляции частиц в пылевой плазме. Эти процессы могут оказаться важными при слабых скоростях ионизации газа внешним источником ионизации (например, продуктами процесса радиоактивного распада) и в земной атмосфере, в которой прилипание электронов к молекулам кислорода приводит к заметному снижению их концентрации и к значительному снижению заряда частиц.

Финансирование.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-22-01000).

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ G^{ℓ}_{nm}

Коэффициенты G^{ℓ}_{nm} можно легко вычислить, используя рекуррентные соотношения:

$$G^0_{00} = G^0_{n0} = G^0_{0m} = 1, \quad n = 1, \infty,\ m = 1, \infty; \quad (82)$$

$$G^0_{(n+1)m} = G^0_{nm}\frac{(n+1/2)\,(n+m+1)}{(n+1)\,(n+m+1/2)}, \quad n = 0, ..., \infty,\ m = n+1, \infty; \quad (83)$$

$$G^{\ell+1}_{nm} = \frac{(n-\ell)}{(n-\ell-1/2)}\frac{(m-\ell)}{(m-\ell-1/2)}\frac{(\ell+1/2)}{(\ell+1)}\times \times \frac{(n+m-\ell+1/2)}{(n+m-\ell)}\frac{(n+m-2\ell-3/2)}{(n+m-2\ell+1/2)}G^{\ell}_{nm}, \quad \ell = 1, \ldots, \infty,\ n, m > \ell. \quad (84)$$

Вычисление величин $G^0_{(n+1)m}$ из соотношения (83) сначала проводится для $n = 0$ и $m = 1, 2, \ldots$ последовательно, затем для $n = 1$ и $m = 2, 3, \ldots$ и т. д., а вычисление $G^{\ell+1}_{\ell}$ из соотношения (84) ведется последовательно для $\ell = 0, 1, \ldots$ для всех необходимых значений n и m.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ФАКТОР С ФАКТОРОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ $L_b/\sqrt{L_b^2 + r^2}$

Введем следующие обозначения и функции (аргументы функций a_1 и a_2 не указываем):

$$x_1 = R - a_1 - a_2,\ x_2 = R + a_1 - a_2,$$
$$x_3 = R - a_1 + a_2,\ x_4 = R + a_1 + a_2;$$
$$\gamma_i = \sqrt{L_b^2 + x_i^2},\ \zeta_i = L_b + \gamma_i,\ \tau_i = x_i + \gamma_i, \quad i = 1, ..., 4;$$

$$f_{a,1}(R) = 2a_1^2(a_1 - R) + 2a_2^2(a_2 - R) + R\left(R^2 - a_1^2 - a_2^2\right),$$
$$f_{a,2}(R) = 4a_1^2 + 4a_2^2 - 3R(a_1 + a_2) - R^2 - 12a_1a_2,$$
$$f_{b,1}(R) = 6a_1(3a_1 - 5a_2) + 5x_2(3a_1 - 3a_2 + R),$$
$$f_{b,2}(R) = 9\left(a_1^2 - 5a_2^2 + 5R^2\right) - 160x_2R,$$
$$f_{c,1}(R) = 48x_1x_4 + 29x_1R + 60a_1a_2,$$
$$f_{c,2}(R) = 133x_1R - 204x_2x_3 + 36a_1a_2,$$
$$f_1(R) = 12a_1^2(23a_1 - 66a_2) + 12a_2^2(54a_1 - 17a_2) + R\left(17a_1^2 + 337a_2^2 - 426a_1a_2\right) - R^2(62a_2 + 71R + 222a_1),$$
$$f_2(R) = a_1^4(312a_1 - 660a_2 + 275R) - 30a_1^2(a_2 - R)^2(10a_2 + 9R) + 20a_1(a_2 - R)^3(9a_2 + 13R) - (a_2 - R)^4(48a_2 + 77R) + 20a_1^3\left(21a_2^2 - 22a_2R + R^2\right).$$

После суммирования (интегрирования) взаимодействия каждого атома одной частицы с каждым атомом другой для геометрического фактора с фактором запаздывания в форме (76) получим

$$f_g(R, L_b) = \frac{2L_b}{5R}\ln\frac{\tau_2\tau_3}{\tau_1\tau_4} + 2\ln\frac{x_1\zeta_2}{x_2\zeta_1} + 2\ln\frac{x_4\zeta_3}{x_3\zeta_4} + \frac{2a_1^3}{15L_bR}\left\{\frac{\gamma_2}{x_2^4}\left[-2f_{b,1}(R) + \frac{x_2^2}{L_b^2}f_{b,2}(R)\right] + \frac{\gamma_3}{x_3^4}\left[2f_{b,1}(-R) - \frac{x_3^2}{L_b^2}f_{b,2}(-R)\right]\right\} - \frac{8a_1^3}{L_b^2R}\left(1 - \frac{3a_1^2}{20L_b^2} - \frac{3R^2 - 3a_2^2}{4L_b^2}\right)\ln\frac{x_2\zeta_3}{x_3\zeta_2} - \frac{2}{L_b^2R}\left[f_{a,1}(R) + \frac{3x_1^3}{40L_b^2}f_{a,2}(R)\right]\ln\frac{x_1\zeta_2}{x_2\zeta_1} + \frac{2}{L_b^2R}\left[f_{a,1}(-R) - \frac{3x_4^3}{40L_b^2}f_{a,2}(-R)\right]\ln\frac{x_4\zeta_3}{x_3\zeta_4} + \frac{1}{30L_bR}\left\{\frac{\gamma_1}{x_1}\left[f_{c,1}(R) + \frac{x_1^2}{2L_b^2}f_{c,2}(R)\right] + \frac{\gamma_4}{x_4}\left[f_{c,1}(-R) + \frac{x_4^2}{2L_b^2}f_{c,2}(-R)\right]\right\} - \frac{1}{60L_b^3R}\left[\frac{x_1^2}{x_2^2}\gamma_2 f_1(R) - \frac{x_4^2}{x_3^2}\gamma_3 f_1(-R)\right] + \frac{1}{30L_bR}\left[\frac{\gamma_2}{x_2^4}f_2(R) - \frac{\gamma_3}{x_3^4}f_2(-R)\right]. \quad (85)$$

Как отмечалось выше, в работе [89] приведено выражение для геометрического фактора с учетом эффектов запаздывания для частиц равного размера (отметим, что в выражении (22) для g_{aux} в этой работе потерян знак минус перед четвертым членом в первом ряду). Расчеты показали, что при равных радиусах выражение (85) дает значения геометрического

фактора, совпадающие с данными расчетов по формулам из работы [89].

С фактором запаздывания в виде (77) геометрический фактор будет определяться выражением

$$f_g\left(R, L_b\right) = \xi_1 f_g\left(R, L_{b,1}\right) + \xi_2 f_g\left(R, L_{b,2}\right). \qquad (86)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ C. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Модифицированные сферические функций Бесселя при $x = k_D a_i$, $i = 1, 2$, вычислялись с использованием рекуррентных соотношений [67]

$$\begin{aligned} k_{n+1}\left(x\right) &= k_{n-1}\left(x\right) + \frac{2n+1}{x} k_n\left(x\right), \\ i_{n-1}\left(x\right) &= i_{n+1}\left(x\right) + \frac{2n+1}{x} i_n\left(x\right). \end{aligned} \qquad (87)$$

На первом шаге по первой формуле (87) вычислялись убывающие с ростом n значения $k_n(x)$ для $n = 1, 2, \ldots, n_{\max}+1$ ($n_{\max} = 1000$), начиная от $k_0(x)$ и $k_1(x)$:

$$\begin{aligned} k_0(x) &= \frac{\pi}{2x} e^{-x}, \\ k_1(x) &= k_0(x)\left(1 + \frac{1}{x}\right). \end{aligned} \qquad (88)$$

На втором шаге вычислялось отношение i_{n+1}/i_n для $n = n_{\max}$ на основе непрерывной дроби Гаусса [94]:

$$\frac{i_n\left(x\right)}{i_{n-1}\left(x\right)} = \frac{x}{2n+1} \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_1\left(x\right)}{1 + \cfrac{a_2\left(x\right)}{1 + \ldots}}}, \qquad (89)$$

где коэффициенты a_k определены соотношениями:

$$a_k\left(x\right) = \frac{x^2}{\left(2n + 2k - 1\right)\left(2n + 2k + 1\right)}, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (90)$$

Вычисления начинались с $k = 20$, что обеспечивало высокую точность вычисления этого отношения. Затем, используя соотношение (24) и уже вычисленные значения $k_n(x)$ для $n = n_{\max}$ и $n_{\max}+1$, вычисляем $i_n(x)$ для $n = n_{\max}$ и $n_{\max}+1$. Окончательно, значения функций $i_n(x)$, убывающих по мере уменьшения n, вычислялись для $n = n_{\max} - 1, \ldots, 1$ из второго рекуррентного соотношения (87). Для контроля точности вычислений на последнем шаге вычисленные значения i_n для $n = 0, 1$ сравнивались с вычисленными из известных соотношений:

$$\begin{aligned} i_0(x) &= \frac{\sinh x}{x}, \\ i_1(x) &= -\frac{\sinh^2 x}{x^2} + \frac{\cosh x}{x}. \end{aligned} \qquad (91)$$

Модифицированные сферические функций Бесселя при $x = k_D R$ вычислялись на основе первого рекуррентного соотношения (87) для $n = 0, 1, \ldots, n_{\max,2}$.

Здесь также приведем выражения для производных модифицированных сферических функций Бесселя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_n\left(z\right)}{\partial z} &= i_{n+1}\left(z\right) + \frac{n}{z} i_n\left(z\right), \\ \frac{\partial k_n\left(x\right)}{\partial x} &= -k_{n+1}\left(x\right) + \frac{n}{x} k_n\left(x\right). \end{aligned} \qquad (92)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. N. Israelachvili, *Intermolecular and surface forces*, 3rd ed., Elsevier, Amsterdam (2011), p.191–499.

2. B. Honig and A. Nicholls, Science **268**, 1144 (1995).

3. I. Ledezma-Yanez, W. D. Z. Wallace, P. Sebastián-Pascual, V. Climent, J. M. Feliu, and M. T. Koper, Nat. Energy **2** (4), 17031 (2017).

4. B. Smit, J. A. Reimer, C. M. Oldenburg, and I. C. Bourg, *Introduction to Carbon Capture and Sequestration*, v.1., World Scientific, Singapore (2014).

5. M. Manciu and E. Ruckenstein, Langmuir **17**, 7061 (2001).

6. H. Wennerstrom, E. Vallina Estrada, J. Danielsson, and M. Oliveberg, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **117**, 10113 (2020).

7. S. Su, I. Siretanu, D. van den Ende, B. Mei, G. Mul, and F. Mugele, Adv. Mater. **33**, 2106229 (2021).

8. D. F. Parsons, M. Boström, P. L. Nostro, and B. W. Ninham, Phys. Chem. Chem. Phys. **13** (27), 12352 (2011).

9. K. Voïtchovsky, J. J. Kuna, S. A. Contera, E. Tosatti, and F. Stellacci, Nat. Nanotechnol. **5**, 401 (2010).

10. В. Н. Цытович, УФН **167**, 57 (1997).

11. В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, В. И. Молотков, О. Ф. Петров, УФН **174**, 495 (2004).

12. В. И. Молотков, О. Ф. Петров, М. Ю. Пустыльник, В. М. Торчинский, В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, ТВТ **42**, 821 (2004).

13. S. V. Vladimirov, K. Ostrikov, and A. A. Samarian, *Physics and Applications of Complex Plasmas*, London, Imperial College Press (2005).

14. V. E. Fortov, A. V. Ivlev, S. A. Khrapak, A. G. Khrapak, and G. E. Morfill, Phys. Rep. **421**, 1 (2005).

15. G. E. Morfill and A. V. Ivlev, Rev. Mod. Phys. **81**, 1353 (2009).

16. M. Bonitz, C. Henning, and D. Block, Rep. Prog. Phys. *73*, 066501 (2010).

17. *Комплексная и пылевая плазма: из лаборатории в космос*, под ред. В. Фортова, Г. Морфилла, Наука, Физматлит, Москва (2012).

18. A. Ivlev, H. Lowen, G. Morfill, and C.P. Royall, *Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids*, Series in Soft Condensed Matter, vol. 5, World Scientific, Singapore (2012).

19. I. Mann, N. Meyer-Vernet, and A. Czechowski, Phys. Rep. **536**, 1 (2014).

20. P. K. Shukla and A. A. Mamun, *Introduction to Dusty Plasma Physics*, CRC Press, Bristol and Philadelphia (2015).

21. А. В. Ивлев, С .А. Храпак, В. И. Молотков, А. Г. Храпак, *Введение в физику пылевой и комплексной плазмы. Учебное пособие*, Издательский дом «Интеллект», Долгопрудный (2017).

22. А. М. Липаев, В. И. Молотков, Д. И. Жуховицкий, В. Н. Наумкин, А. Д. Усачев, А. В. Зобнин, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, ТВТ **58** (4), 485 (2020).

23. I. M. Kennedy and S. J. Harris, J. Colloid. Interface. Sci. **130**, 489 (1989).

24. P. Patra and A. Roy, Phys. Rev. Fluids **7**, 064308 (2022).

25. T. B. Jones and T. B. Jones, *Electromechanics of Particles*, Cambridge University Press, Cambridge (2005).

26. A. Castellanos, Adv. Phys. **54**, 263 (2005).

27. J. Feng, G. Biskos, and A. Schmidt-Ott, Scient. Rep. **5**, 1 (2015).

28. F. Greiner, A. Melzer, B.Tadsen, S. Groth, C. Killer, F. Kirchschlager, F. Wieben, I. Pilch, H. Kruger, D. Block, A. Piel, and S. Wolf, Eur. Phys. J. D **72**, 81 (2018).

29. A. R. Wassel, M. E. El-Naggar, and K. Shoueir, J. Environ. Chem. Eng. **8** 104175, (2020).

30. X. Meng, J. Zhu, and J. Zhang, J. Phys. D **42**, 065201 (2009).

31. V. A. Turek, M. P. Cecchini, J. Paget, A. R. Kucernak, A. A. Kornyshev, and J. B. Edel, ACS Nano **6**, 7789 (2012).

32. P.-P. Fang, S. Chen, H. Deng, M. D. Scanlon, F. Gumy, H. J. Lee, D. Momotenko, V. Amstutz, F. Cortés-Salazar, C. M. Pereira, Z. Yang, and H. H. Girault, ACS Nano **7**, 9241 (2013).

33. J. B. Edel, A. A. Kornyshev, and M. Urbakh, ACS Nano **7**, 9526 (2013).

34. B. Gady, D. Schleef, R. Reifenberger, D. Rimai, and L. P. DeMejo, Phys. Rev. B **53**, 8065 (1996).

35. B. Gady, R. Reifenberger, D. S. Rimai, and L. P. DeMejo, Langmuir **13**, 2533 (1997).

36. Y. Liu, C. Song, G. Lv, N. Chen, H. Zhou, and X. Jing, Appl. Surf. Sci. **433**, 450 (2018).

37. M. C. Stevenson, S. P. Beaudoin, and D. S. Corti, J. Phys. Chem. C **124** 3014 (2020).

38. M.C. Stevenson, S.P. Beaudoin, and D.S. Corti, J. Phys. Chem. C **125** 20003 (2021).

39. H. Zhou, M. Götzinger, and W. Peukert, Powder Technol. **135–136**, 82 (2003).

40. Y. Gao, E. Tian, and J. Mo, ACS ES and Eng. **1**, 1449 (2021).

41. N. M. Kovalchuk, D. Johnson, V. Sobolev, N. Hilal, and V. Starov, Adv. Colloid. Interface. Sci. **272**, 102020 (2019).

42. B. V. Derjaguin, N. V. Churaev, and V. M. Muller, *Surface Forces*, Consultants Bureau, New York (1987).

43. E. J. W. Verwey and J. Th. G. Overbeek, *Theory of the Stability of Lyophobic Colloids*, Elsevier, Amsterdam (1948).

44. A. B. Glendinning and W. B. Russel, J. Colloid Interface Sci.**93**, 95 (1983).

45. S. L. Carnie, D. Y. C. Chan, J. Colloid. Interf. Sci. **161**, 260 (1993).

46. А. В. Филиппов, И. Н. Дербенев, ЖЭТФ **150**, 1262 (2016).

47. I. N. Derbenev, A. V. Filippov, A. J. Stace, and E. Besley, J. Chem. Phys. **145**, 084103 (2016).

48. А. В. Филиппов, И. Н. Дербенев, А. А. Паутов, М. М. Родин, ЖЭТФ, **152**, 607 (2017).

49. I. N. Derbenev, A. V. Filippov, A.J. Stace, and E. Besley, Soft Matter **14**, 5480 (2018).

50. S. V. Siryk, A. Bendandi, A. Diaspro, and W. Rocchia, J. Chem. Phys. **155**, 114114 (2021).

51. S. V. Siryk and W. Rocchia, J. Phys. Chem. B **126**, 10400 (2022).

52. Y.-K. Yu, Phys. Rev. E **102**, 052404 (2020).

53. O. I. Obolensky, T. P. Doerr, and Y.-K. Yu, Eur. Phys. J. E **44**, 129 (2021).

54. W. R. Bowen and F. Jenner, Adv. Colloid Interface Sci. **56**, 201 (1995).

55. J. I. Kilpatrick, S.-H. Loh, and S. P. Jarvis, J. Am. Chem. Soc. **135**, 2628 (2013).

56. S. R. Van Lin, K. K. Grotz, I. Siretanu, N. Schwierz, and F. Mugele, Langmuir **35**, 5737 (2019).

57. A. Klaassen, F. Liu, F. Mugele, and I. Siretan, Langmuir **38**, 914 (2022).

58. А. В. Филиппов, В. М. Старов, Письма в ЖЭТФ **117**, 604 (2023).

59. A. V. Filippov and V. Starov, J. Phys. Chem. B **127**, 6562 (2023).

60. А. В. Филиппов, ЖЭТФ **136**, 601 (2009).

61. A. V. Filippov, Contr. Plasma Phys. **49**, 433 (2009).

62. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, ЖЭТФ **144**, 931 (2013).

63. А. В. Филиппов, Письма в ЖЭТФ **115**, 197 (2022).

64. А. В. Филиппов, ЖЭТФ **161**, 691 (2022).

65. P. Debye and E. Hückel, Phys. Zeitschr. **24**, 185 (1923).

66. Г. Карслоу, Д. Егер, *Теплопроводность твердых тел*, Наука, Москва (1964) [H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., Clarendon, Oxford (1959); Nauka, Moscow (1964)].

67. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Иностранная литература, Москва (1949), т.1 [G. N. Watson,*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, London (1922)].

68. D. Langbein, *Theory of Van der Waals Attraction*, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 72, ed. by G. Hohler, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1974).

69. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Наука, Москва (1970).

70. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, Издателство иностарнной литературы, Москва (1954).

71. В .Р. Муниров, А. В. Филиппов, ЖЭТФ **142**, 594 (2012).

72. E. S. Reiner, C. J. Radke, J. Chem. Soc. Faraday Trans.**86**, 3901 (1990).

73. M. K. Gilson, M. E. Davis, B. A. Luty, and J. A. McCammon, J. Phys. Chem. **97**, 3591 (1993).

74. B. Lu, X. Cheng, T. Hou, and J. A. McCammon, J. Chem. Phys. **123**, 084904 (2005).

75. W. H. Press, W. T. Vetterling, S. A. Teukolsky, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes Example Book (FORTRAN)*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).

76. H. C. Hamaker, Physica **4**, 1058 (1937).

77. H. B. G. Casimir and D. Polder, Phys. Rev. **73**, 360 (1948).

78. Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ **29**, 94 (1955).

79. И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, ЖЭТФ **37**, 229 (1959).

80. Б. В. Дерягин, И. И. Абрикосова, Е. М. Лифшиц, УФН **185**, 981 (2015).

81. Ю. С. Бараш, В. Л. Гинзбург, УФН **143** , 345 (1984).

82. Н. В. Чураев, Успехи химии **73**, 26 (2004).

83. D. J. Mitchell and B. W. Ninham, J. Chem. Phys. **56**, 1117 (1972).

84. R. G. Horn and J. N. Israelachvili, J. Chem. Phys. **75**, 1400 (1981).

85. J. Th. G. Overbeek, in *Colloid Science*, ed. by H. R. Kruyt, Vol. 1, p. 266, Elsevier, Amsterdam (1952).

86. B. Vincent, J. Colloid. Interf. Sci. **42**, 270 (1973).

87. P. Görner and J. Pich, J. Aerosol Sci. **20**, 735 (1989).

88. J. Chen and A. Anandarajah, J. Colloid. Interf. Sci. **180**, 519 (1996).

89. G. Sh. Boltachev, N. B. Volkov, and K. A. Nagayev, J. Colloid. Interf. Sci. **355**, 417 (2011).

90. S. R. Gomes de Sousa, A. Leonel, and A. J. F. Bombard, Smart Mater. Struct. **29**, 055039 (2020).

91. А. А. Радциг, Б. М. Смирнов,*Справочник по атомной и молекулярной физике*, Атомиздат, Москва (1980).

92. А. В. Филиппов, Н. А. Дятко, А. С. Костенко, ЖЭТФ **146**, 1122–1134 (2014).

93. А.В. Филиппов, В.Н. Бабичев, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, В. Е. Черковец, В. К. Рерих, М. Д. Таран, Физика плазмы **41**, 969 (2015).

94. W. Gautschi and J. Slavik, Math. Comput. **32**, 865 (1978).