

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗ В ОДНОМЕРНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ОДНОМОДОВЫХ ВОЛНОВОДАХ

И. М. Суслов*

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук,
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 31 мая 2023 г.,
после переработки 3 августа 2023 г.
Принята к публикации 18 сентября 2023 г.

Локализация электронов в одномерных неупорядоченных системах обычно описывается в рамках приближения случайных фаз, когда распределения фаз φ и θ , входящих в трансфер-матрицу, считаются однородными. В общем случае приближение случайных фаз нарушается, и уравнения эволюции (при изменении длины системы L) содержат три независимые переменные — ландауэровское сопротивление ρ и комбинированные фазы $\psi = \theta - \varphi$ и $\chi = \theta + \varphi$. Фаза χ не влияет на эволюцию ρ и не рассматривалась в предыдущих работах. Распределение фазы ψ при изменении энергии электрона $\mathcal{E}$ испытывает своеобразный фазовый переход в точке $\mathcal{E}_0$, состоящий в появлении у ψ мнимой части. Распределение сопротивлений $P(\rho)$ не имеет сингулярности в точке $\mathcal{E}_0$ и переход выглядит ненаблюдаемым в электронных системах. Однако теория одномерной локализации непосредственно применима к распространению волн в одномодовых волноводах. Оптические методы более эффективны и обеспечивают возможность измерения фаз ψ и χ . С одной стороны, это делает наблюдаемым фазовый переход в распределении $P(\psi)$, который можно рассматривать как «след» от порога подвижности, сохраняющийся в одномерных системах. С другой стороны, фаза χ становится наблюдаемой: это делает актуальным вывод уравнения для ее эволюции, который производится ниже. Релаксация распределения $P(\chi)$ к предельному распределению $P_\infty(\chi)$ при $L \rightarrow \infty$ описывается двумя экспонентами, показатели которых испытывают разрыв второй производной при изменении энергии $\mathcal{E}$.

DOI: 10.31857/S0044451024020093

и при наличии инвариантности относительно обращения времени допускает параметризацию [1]:

$$T = \begin{pmatrix} 1/t & -r/t \\ -r^*/t^* & 1/t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho+1} e^{i\varphi} & \sqrt{\rho} e^{i\theta} \\ \sqrt{\rho} e^{-i\theta} & \sqrt{\rho+1} e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

1. ВВЕДЕНИЕ

Локализация электронов в одномерных неупорядоченных системах может описываться с помощью трансфер-матрицы T , которая связывает амплитуды волн слева $(Ae^{ikx} + Be^{-ikx})$ и справа $(Ce^{ikx} + De^{-ikx})$ от рассеивателя,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где t и r — амплитуды прохождения и отражения и $\rho = |r/t|^2$ — безразмерное сопротивление по Ландауэру [2]. При последовательном расположении рассеивателей их трансфер-матрицы перемножаются. Для слабого рассеивателя матрица T близка к единичной, что позволяет выводить дифференциальные уравнения эволюции (при изменении длины системы L) для ее параметров.

Обычно такие уравнения выводятся в приближении случайных фаз, когда распределения φ и θ считаются однородными [3–8]. Такое приближение хорошо работает для слабого беспорядка в глубине

* E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

разрешенной зоны, что обычно и предполагается в теоретических работах (см. ссылки в [9–11]); флуктуационные состояния в запрещенной зоне обсуждаются сравнительно редко и лишь на уровне волновых функций [12–14]. Систематический анализ показывает, что приближение случайных фаз сильно нарушается вблизи края исходной зоны и в запрещенной зоне идеального кристалла [15]. В общем случае уравнения эволюции пишутся в терминах ландауэровского сопротивления ρ и комбинированных фаз (разд. 2)

$$\psi = \theta - \varphi, \quad \chi = \theta + \varphi. \quad (3)$$

Фаза χ не влияет на эволюцию ρ и не представляет интереса для физики конденсированного состояния; поэтому она не обсуждалась в предыдущих работах [15–17]. Оптические измерения (см. ниже) позволяют изучать распределение фазы χ , что делает актуальным его теоретическое исследование.

Полное уравнение эволюции для распределения $P(\rho, \psi, \chi)$ выводится в Приложении. Фактически оно не имеет практического значения: существенна лишь его общая структура, обеспечивающая разделение переменных (разд. 2). Факторизация $P(\rho, \psi, \chi) = P(\rho, \psi)P(\chi)$ справедлива при произвольной длине системы L , что позволяет ограничиться уравнениями для $P(\rho, \psi)$ и $P(\chi)$. При больших L возникает факторизация $P(\rho, \psi) = P(\rho)P(\psi)$, приводящая к замкнутому уравнению для $P(\rho)$ и уравнению для стационарного распределения $P(\psi)$.

Стационарное распределение фазы ψ изучалось в работах [16, 17]; в глубине неупорядоченной системы оно испытывает своеобразный фазовый переход в точке $\mathcal{E}_0$ при изменении энергии электрона $\mathcal{E}$ [17], состоящий в появлении мнимой части ψ (разд. 3). При этом распределение сопротивлений $P(\rho)$ не имеет в точке $\mathcal{E}_0$ никакой сингулярности, и переход выглядит ненаблюдаемым в рамках физики конденсированного состояния.

Уравнение эволюции для $P(\chi)$ выводится в разд. 4: оно имеет вид обычного диффузионного уравнения, в котором коэффициент диффузии и скорость дрейфа экспоненциально зависят от L . Соответствующие показатели экспоненты имеют сингулярности при изменении $\mathcal{E}$, состоящие в скачке второй производной (разд. 5). Такие фазовые переходы также ненаблюдаемы для электронных неупорядоченных систем.

Однако подход, использованный в [15–17], непосредственно применим для описания рассеяния волн, распространяющихся в одномодовых волноводах (разд. 6.1). Существующие оптические методы

(гетеродинный подход, микроскопия ближнего поля и т. д.) достаточно эффективны и позволяют измерять распределение всех параметров ρ , ψ , χ внутри волновода¹⁾ (разд. 6.3). Это расширяет наблюдаемые аспекты теории одномерной локализации и делает возможным ее глубокую экспериментальную проверку. В частности, становятся наблюдаемыми фазовые переходы в распределениях $P(\psi)$ и $P(\chi)$ (разд. 6.2, 6.3). Возможные схемы измерений обсуждаются в разд. 6.4.

Краткое изложение обсуждаемых вопросов содержится в заметке автора с С. И. Божевольным [18].

2. ОБЩАЯ СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИИ

Наиболее общее уравнение эволюции описывает изменение совместной функции распределения $P(\rho, \psi, \chi)$ при увеличении длины системы L и имеет следующую структуру (см. Приложение):

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \left\{ \hat{L}_{\rho, \psi} P \right\}'_{\rho} + \left\{ \hat{M}_{\rho, \psi} P \right\}'_{\psi} + \left\{ \hat{K}_{\rho, \psi, \chi} P \right\}'_{\chi}, \quad (4)$$

где $\hat{L}$, $\hat{M}$, $\hat{K}$ — некоторые операторы, зависящие от указанных переменных. Правая часть является суммой полных производных, что обеспечивает сохранение вероятности. Как обсуждалось в [17, 19], условия для разделения переменных в уравнениях диффузионного типа оказываются более слабыми, чем для задачи на собственные значения. Независимость операторов $\hat{L}$ и $\hat{M}$ от χ обеспечивает факторизацию $P(\rho, \psi, \chi) = P(\rho, \psi)P(\chi)$, где $P(\rho, \psi)$ и $P(\chi)$ определяются уравнениями

$$\frac{\partial P(\rho, \psi)}{\partial L} = \left\{ \hat{L}_{\rho, \psi} P(\rho, \psi) \right\}'_{\rho} + \left\{ \hat{M}_{\rho, \psi} P(\rho, \psi) \right\}'_{\psi} \quad (5)$$

и

$$\frac{\partial P(\chi)}{\partial L} = \left\{ \hat{K}_{\chi} P(\chi) \right\}'_{\chi}, \quad (6)$$

$$\hat{K}_{\chi} = \int \hat{K}_{\rho, \psi, \chi} P(\rho, \psi) d\rho d\psi.$$

Конкретный вид уравнения (5) приведен в [16, 17], а уравнение (6) выводится в разд. 4. В пределе больших L , когда типичные значения ρ велики, оператор $\hat{M}_{\rho, \psi}$ становится независимым от ρ ; тогда решение

¹⁾ Разумеется, при этом параметр ρ больше не имеет смысла ландауэровского сопротивления, но определяет амплитуды проходящей и отраженной волн (разд. 6.2).

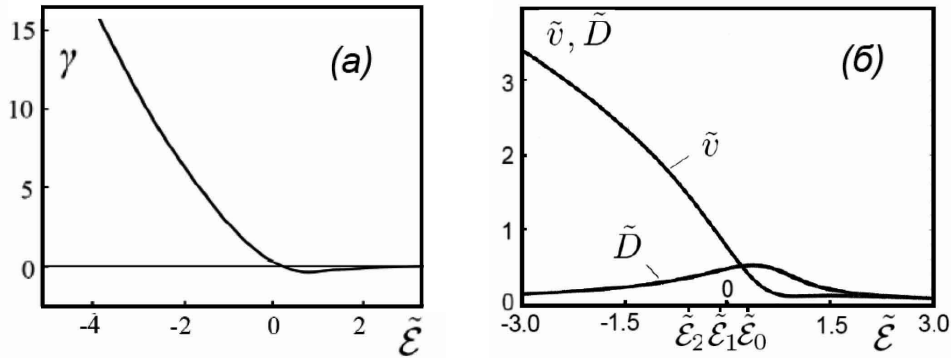


Рис. 1. Зависимости параметров γ , $\tilde{v} = v/W^{2/3}$ и $\tilde{D} = D/W^{2/3}$ от приведенной энергии $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}/W^{4/3}$, полученные на основе анализа моментов для элементов трансфер-матрицы [15]. Эти моменты являются регулярными функциями энергии, что обеспечивает регулярность приведенных зависимостей. Малость параметра γ и равенство $v = D$, имеющие место в приближении случайных фаз, реализуются лишь в глубине разрешенной зоны. Точки $\tilde{\mathcal{E}}_0$, $\tilde{\mathcal{E}}_1$, $\tilde{\mathcal{E}}_2$ соответствуют фазовым переходам, обсуждаемым в разд. 3 и 5

уравнения (5) факторизуется, $P(\rho, \psi) = P(\rho)P(\psi)$, где для $P(\rho)$ и $P(\psi)$ справедливы уравнения

$$\frac{\partial P(\psi)}{\partial L} = \left\{ \hat{M}_\psi P(\psi) \right\}'_\psi, \quad (7)$$

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial L} = \left\{ \hat{\mathcal{L}}_\rho P(\rho) \right\}'_\rho, \quad \hat{\mathcal{L}}_\rho = \int \hat{L}_{\rho, \psi} P(\psi) d\psi. \quad (8)$$

Уравнение (7) обеспечивает существование стационарного распределения фазы ψ . Уравнение (8) для $P(\rho)$ имеет вид [15]

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial L} = D \frac{\partial}{\partial \rho} \left[-\gamma(1+2\rho)P(\rho) + \rho(1+\rho) \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \right] \quad (9)$$

и при больших L приводит к логнормальному распределению

$$P(\rho) = \frac{1}{\rho \sqrt{4\pi DL}} \exp \left\{ -\frac{[\ln \rho - vL]^2}{4DL} \right\}, \quad (10)$$

где $v = (2\gamma+1)D$. Типичное значение ρ экспоненциально растет с длиной L , что является наблюдаемым проявлением локализации состояний в одномерных системах. В приближении случайных фаз параметр γ равен нулю, и уравнения (9), (10) совпадают с результатами работ [3–8]. Зависимости параметров γ , D , v от приведенной энергии $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}/W^{4/3}$, полученные на основе анализа моментов распределения для элементов трансфер-матрицы [15], показаны на рис. 1; здесь $\mathcal{E}$ — энергия, отсчитанная от нижнего края зоны, и W — амплитуда случайного потенциала; все энергии измеряются в единицах интеграла

перекрывания для одномерной модели Андерсона, который порядка ширины исходной зоны. Нарушение приближения случайных фаз является очевидным.

Из сказанного ясно, что явный вид уравнения (4) не имеет практического значения, а существенна лишь его общая структура. При произвольных L оно распадается на два уравнения (5) и (6), а при больших L — на три уравнения (6), (7), (8). Ясно также, что выбор независимых переменных ρ , ψ , χ носит объективный характер.

3. ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В РАСПРЕДЕЛЕНИИ $P(\psi)$

Смысл фазового перехода в распределении ψ состоит в том, что различие между разрешенной и запрещенной зонами сохраняется (в некотором смысле) при наличии случайного потенциала, хотя особенность плотности состояний размывается и она становится гладкой. Это напоминает широко известную аргументацию Мотта [20], что роль края разрешенной зоны переходит к порогу подвижности. В одномерном случае порога подвижности нет, но некоторый «след» от него сохраняется. Дело в том, что в разрешенной зоне ($\mathcal{E} > 0$) пробный рассеиватель описывается трансфер-матрицей (2), а в запрещенной ($\mathcal{E} < 0$) — псевдо-трансфер-матрицей $\mathcal{T}$ [15], связывающей коэффициенты при растущей и убывающей экспонентах слева ($Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$) и справа ($Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$) от рассеивателя. В простейшем случае матрица $\mathcal{T}$ действительна и соответствует чисто мнимым значениям фаз θ и φ в формуле (2).

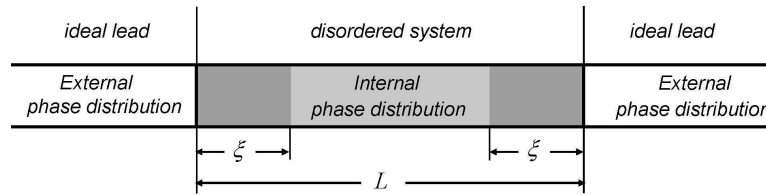


Рис. 2. Внешнее и внутреннее распределение фаз

Сравним ситуацию при $\mathcal{E} > 0$ и $\mathcal{E} < 0$: при достаточно большой раздвижке по энергии различие между двумя типами матриц может быть сделано сколь угодно большим, и оно не может быть перекрыто при добавлении в систему слабого беспорядка. Поэтому граница между истинными и псевдо-трансфер-матрицами может лишь сдвигаться, но не может исчезнуть²⁾. Фактически это проявляется в появлении у фазы ψ мнимой части при энергиях $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$ [17].

Формальные утверждения работы [17] сводятся к следующему. Прежде всего, нужно различать «внешнее» и «внутреннее» распределение фаз (рис. 2). Внутреннее распределение возникает в глубине достаточно длинной неупорядоченной системы и не зависит от граничных условий. При рассмотрении системы со стороны идеальных контактов наблюдается «внешнее» распределение фаз, определяемое граничными условиями; именно такие фазы входят в трансфер-матрицу. Влияние границ раздела существенно на масштабе порядка длины локализации ξ , что определяет переходную область, в которой внутреннее распределение фаз постепенно трансформируется к внешнему. В пределе больших L распределение $P(\rho)$ определяется внутренним распределением фаз, что обеспечивает его неза-

висимость от граничных условий: последнее можно утверждать на формальном уровне [15, 17]. Однако в уравнения эволюции входит именно внешнее распределение фаз, и нужно понять, почему это не влияет на предельное распределение $P(\rho)$. Вторым вопросом, связанным с первым, состоит в следующем: каким образом можно найти внутреннее распределение фаз, если оно не входит в уравнения?

Поставленные вопросы разрешаются следующим образом. Фаза ψ оказывается «плохой» переменной, а «правильной» переменной является

$$w = -\text{ctg } \psi/2. \quad (11)$$

Форма стационарного распределения $P(w)$ определяется внутренними свойствами системы и не зависит от граничных условий. Изменение граничных условий приводят к трем эффектам: масштабному преобразованию $w \rightarrow sw$ и трансляциям $w \rightarrow w + w_0$ и $\psi \rightarrow \psi + \psi_0$. Соответствующее изменение распределения $P(\psi)$ является легко предсказуемым [17] и может наблюдаться во внешнем распределении фаз. Уравнения эволюции инвариантны относительно трансляции $\psi \rightarrow \psi + \psi_0$ и внутреннее распределение фаз может обсуждаться при некотором фиксированном выборе начала отсчета. Инвариантность предельного распределения $P(\rho)$ относительно преобразований $w \rightarrow sw$ и $w \rightarrow w + w_0$ реализуется динамически. Аналогично апериодическим осцилляциям $P(\rho)$ [21, 22], в области $L \lesssim \xi$ масштабный фактор s и трансляционный сдвиг w_0 испытывают осцилляции при изменении L , которые затухают при $L \rightarrow \infty$. При этом s и w_0 стремятся к некоторым «правильным» значениям, которые обеспечивают правильные значения D и v в предельном распределении (10). Указанные «правильные» значения³⁾ соответствуют внутреннему распределению

²⁾ Конечно, можно возразить, что при наличии случайного потенциала нарушается пространственная однородность, и сдвиг этой границы будет зависеть от положения пробного рассеивателя, что приведет к размытию фазового перехода. Физически именно это и происходит, обеспечивая регулярность ландауэровского сопротивления ρ . Однако такие флуктуации дна зоны учитываются пространственными флуктуациями фазы ψ . Ключевой момент состоит в том, что распределение $P(\psi)$ является стационарным и вдали от границ системы обладает пространственной однородностью: оно определяется некоторым набором параметров, которые не зависят от координаты. Поэтому для распределения ψ в целом граница между истинными и псевдо-трансфер-матрицами находится при строго определенной энергии. Стационарное распределение $P(\psi)$ оказывается одним и тем же как при изменении координаты для конкретной реализации потенциала, так и изменении его реализации: фактически это обычная эргодичность, поскольку координата x (разд. 6) играет роль времени.

³⁾ Смысл этих значений s и w_0 состоит в том, что распределение $P(\psi)$ становится стационарным лишь при некоторых «правильных» граничных условиях, которые автоматически формируются на расстоянии порядка ξ от границ системы. Если «правильные» граничные условия (определяющие s и

фаз и последнее может быть найдено при возвращении к переменной ψ . При этом оказывается, что при $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$ трансляционный сдвиг w_0 оказывается комплексным, что означает появление мнимой части у фазы ψ . Это изменение носит качественный характер, указывая на существование фазового перехода.

Точка $\mathcal{E}_0$ не является особой для сопротивления системы ρ , так что функция распределения $P(\rho)$ проходит через нее совершенно гладким образом (рис. 1 б). Поэтому в рамках физики конденсированного состояния описанный фазовый переход выглядит ненаблюдаемым. Однако в оптике он имеет наблюдаемые проявления в виде корневых сингулярностей в частотных зависимостях (разд. 6.2, 6.3).

4. УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ $P(\chi)$

Согласно [17], изменение трансфер-матрицы $T^{(n)}$ при изменении числа рассеивателей n на единицу определяется рекуррентным соотношением

$$T^{(n+1)} = T^{(n)} T_\delta T_{\epsilon_n}, \quad (12)$$

где матрицы $T^{(n)}$ и T_{ϵ_n} статистически независимы, а T_δ постоянна. При этом можно считать, что

$$T_{\epsilon_n} = \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon_n & \epsilon_n e^{i\gamma} \\ \epsilon_n e^{-i\gamma} & 1 + i\epsilon_n \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$T_\delta = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^* & \mathcal{A}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\Delta^2} e^{i\alpha} & \Delta e^{i\beta} \\ \Delta e^{-i\beta} & \sqrt{1+\Delta^2} e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где величина ϵ_n пропорциональна амплитуде n -го рассеивателя (причем $\langle \epsilon_n \rangle = 0$, $\langle \epsilon_n^2 \rangle \equiv \epsilon^2$), а T_δ определяется параметром δ , пропорциональным расстоянию между рассеивателями⁴⁾ (при этом $\Delta \sim \alpha \sim \delta$ [17]). В дальнейшем рассматриваем предел

$$\delta \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \delta/\epsilon^2 = \text{const} \quad (15)$$

w_0) выбрать на границе системы с идеальными контактами, то переходная область порядка ξ исчезает и стационарное распределение формируется на очень малых масштабах, так что различие между «внешним» и «внутренним» распределением фаз (рис. 2) практически исчезает. Это и дает способ определения «внутреннего» распределения фаз, которое в уравнения не входит, через «внешнее» распределение фаз, входящее в уравнения.

⁴⁾ Постоянство T_δ имеет место, если расстояние между рассеивателями одинаково. Так в одномерной модели Андерсона рассеиватели находятся в каждом узле решетки: в этом случае число рассеивателей n совпадает с длиной системы L в единицах постоянной решетки.

и сохраняем члены первого порядка по δ и второго по ϵ .

Принимая для $T^{(n)}$ параметризацию (2) и обозначая параметры матрицы $T^{(n+1)}$ как $\tilde{\rho}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\theta}$, имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\tilde{\rho}} e^{i\tilde{\varphi}} &= \sqrt{1+\rho} e^{i\varphi} (\mathcal{A} + \epsilon \mathcal{C}) + \sqrt{\rho} e^{i\theta} (\mathcal{B}^* + \epsilon \mathcal{D}^*), \\ \sqrt{\tilde{\rho}} e^{i\tilde{\theta}} &= \sqrt{1+\rho} e^{i\varphi} (\mathcal{B} + \epsilon \mathcal{D}) + \sqrt{\rho} e^{i\theta} (\mathcal{A}^* + \epsilon \mathcal{C}^*), \end{aligned} \quad (16)$$

где мы положили

$$\mathcal{C} = \mathcal{B} e^{-i\gamma} - i\mathcal{A}, \quad \mathcal{D} = \mathcal{A} e^{i\gamma} + i\mathcal{B}. \quad (17)$$

Возводя по модулю в квадрат одно из уравнений (16), получим (опуская индекс у ϵ_n)

$$\tilde{\rho} = \rho + \mathcal{K} \sqrt{\rho(1+\rho)} + \epsilon^2(1+2\rho), \quad (18)$$

где

$$\mathcal{K} = 2\Delta \cos(\psi - \beta) + 2\epsilon \cos(\psi - \gamma) - 2\epsilon^2 \sin(\psi - \gamma). \quad (19)$$

Беря произведение второго уравнения (16) с комплексно сопряженным первым и исключая $\tilde{\rho}$ с помощью уравнения (18), получим связь $\tilde{\psi}$ и ψ [17]:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \psi + 2(\epsilon - \alpha) + (R^2/2 - 1)\epsilon^2 \sin 2(\psi - \gamma) - \\ &- R [\Delta \sin(\psi - \beta) + \epsilon \sin(\psi - \gamma) + \epsilon^2 \cos(\psi - \gamma)], \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$R = \frac{1+2\rho}{\sqrt{\rho(1+\rho)}}. \quad (21)$$

Соотношения (18) и (20) позволяют вывести уравнение эволюции для $P(\rho, \psi)$ [17]. Теперь возьмем произведение двух уравнений (16)

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{\rho}(1+\tilde{\rho})} e^{i\tilde{\chi} - i\chi} &= \sqrt{\rho(1+\rho)} (1 + 2\epsilon^2) + \\ &+ \Delta [e^{i(\beta - \psi)} + 2\rho \cos(\beta - \psi)] \\ &+ \epsilon [e^{i(\gamma - \psi)} + 2\rho \cos(\gamma - \psi)] - \\ &- \epsilon^2 [ie^{i(\gamma - \psi)} - 2\rho \sin(\gamma - \psi)] \end{aligned} \quad (22)$$

и, исключая $\tilde{\rho}$, получим

$$\tilde{\chi} = \chi - f(\rho, \psi), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} f(\rho, \psi) &= \\ &= \frac{\Delta \sin(\psi - \beta) + \epsilon \sin(\psi - \gamma) + \epsilon^2 \cos(\psi - \gamma)}{\sqrt{\rho(1+\rho)}} - \\ &- \frac{\epsilon^2(1+2\rho) \sin 2(\psi - \gamma)}{2\rho(1+\rho)}. \end{aligned}$$

Составляя уравнение эволюции для $P(\chi)$,

$$P_{n+1}(\tilde{\chi}) = \int \delta(\tilde{\chi} - \chi + f(\rho, \psi)) P_n(\chi) \times \\ \times P_n(\rho, \psi) P_n(\epsilon) d\chi d\rho d\psi d\epsilon, \quad (24)$$

и проводя тривиальное интегрирование по χ , имеем

$$P_{n+1}(\chi) = \langle P_n(\chi + f(\rho, \psi)) \rangle, \quad (25)$$

где усреднение происходит по ρ, ψ, ϵ . Разложение по малой величине $f(\rho, \psi)$ дает

$$P_{n+1}(\chi) - P_n(\chi) = \\ = \langle f(\rho, \psi) \rangle \frac{dP_n}{d\chi} + \frac{1}{2} \langle f(\rho, \psi)^2 \rangle \frac{d^2 P_n}{d\chi^2}, \quad (26)$$

что приводит к искомому уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial L} = -v^* P'_\chi + D^* P''_{\chi\chi}, \quad (27)$$

которое имеет вид обычного уравнения диффузии с переменными коэффициентами

$$v^* = \left\langle \frac{-\Delta \sin(\psi - \beta) + \epsilon^2 \cos(\psi - \gamma) [R \sin(\psi - \gamma) - 1]}{\sqrt{\rho(1 + \rho)}} \right\rangle,$$

$$D^* = \left\langle \frac{\epsilon^2 \sin^2(\psi - \gamma)}{2\rho(1 + \rho)} \right\rangle, \quad (28)$$

определяемыми средними по распределению $P(\rho, \psi)$.

5. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ $P(\chi)$

При больших L типичные значения ρ велики, и в (28) можно ограничиться главным порядком по $1/\rho$. Кроме того, распределение $P(\rho, \psi)$ факторизуется, и усреднение по ρ и ψ происходит независимо:

$$v^* = \langle -\Delta \sin(\psi - \beta) - \epsilon^2 \cos(\psi - \gamma) + \epsilon^2 \sin 2(\psi - \gamma) \rangle \times \\ \times \langle \rho^{-1} \rangle, \quad (29)$$

$$D^* = \frac{1}{2} \langle \epsilon^2 \sin^2(\psi - \gamma) \rangle \langle \rho^{-2} \rangle.$$

Моменты $\langle \rho^m \rangle$ для логнормального распределения (10) имеют экспоненциальное поведение

$$\langle \rho^m \rangle \propto \exp(\kappa_m L) \quad (30)$$

с показателями

$$\kappa_m = \begin{cases} vm + Dm^2, & m > -v/2D \\ -v^2/4D, & m < -v/2D \end{cases} \quad (31a)$$

$$(31b)$$

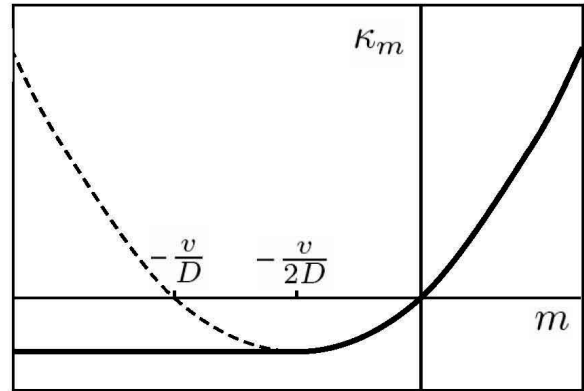


Рис. 3. Показатель κ_m в формуле (30) как функция m . Сплошная кривая — при учете ограничения $\rho \gtrsim 1$ для логнормального распределения (10), штриховая кривая — при отсутствии такого ограничения

При вычислении $\langle \rho^m \rangle$ нужно учитывать, что логнормальное распределение (10) справедливо не для произвольных ρ , а лишь для $\rho \gtrsim 1$; в первом случае результат (31a) был бы справедлив без ограничений⁵⁾ (рис. 3).

Параметр κ_m отрицателен при $m < 0$, и удобно положить для наглядности

$$\kappa_{-m} = -\tilde{\kappa}_m, \quad m > 0. \quad (32)$$

Ввиду стационарности распределения $P(\psi)$ средние по ψ в выражениях (29) сводятся к константам, так что уравнение для $P(\chi)$ принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial L} = c_1 e^{-\tilde{\kappa}_1 L} P'_\chi + c_2 e^{-\tilde{\kappa}_2 L} P''_{\chi\chi} \quad (33)$$

и при больших L решается итерационным способом:

$$P_L(\chi) = \\ = P_\infty(\chi) - \frac{c_1}{\tilde{\kappa}_1} e^{-\tilde{\kappa}_1 L} P'_\infty(\chi) - \frac{c_2}{\tilde{\kappa}_2} e^{-\tilde{\kappa}_2 L} P''_\infty(\chi), \quad (34)$$

где $P_\infty(\chi)$ — предельное распределение при $L \rightarrow \infty$.

На рис. 1 б отмечены точки $\tilde{\epsilon}_1$ и $\tilde{\epsilon}_2$, соответствующие условиям $v = 2D$ и $v = 4D$. Если бы логнормальное распределение (10) было справедливо при

⁵⁾ Подынтегральная функция $\rho^m P(\rho)$ после замены $x = \ln \rho$ имеет гауссовскую форму, справедливую лишь при $x \gtrsim 1$. Для $m > -v/2D$ гауссовская функция сильно локализована вблизи максимума, находящегося при больших положительных x , так что ограничение $x \gtrsim 1$ для нее несущественно. Для $m < -v/2D$ максимум гауссовской функции уходит в большие отрицательные x , и интеграл определяется ее хвостом в области $x \gtrsim 1$; коэффициент пропорциональности в (30) зависит от деталей распределения при $\rho \lesssim 1$, но показатель κ_m от них не зависит.

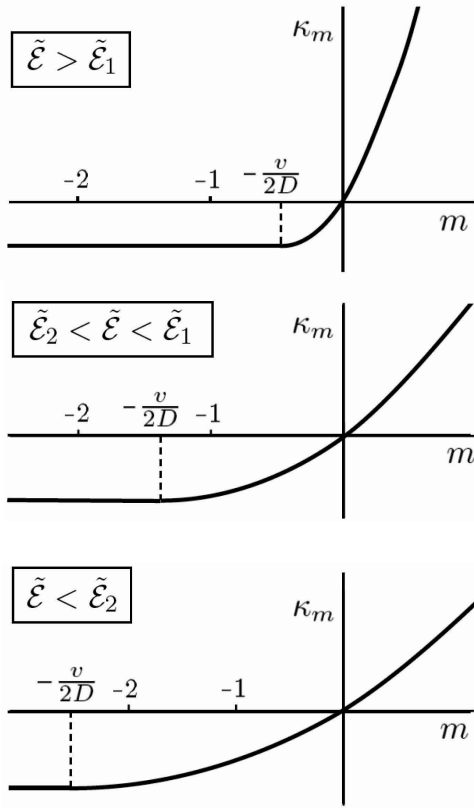


Рис. 4. Взаимное расположение точек $-v/2D$, -1 и -2 при $\tilde{\epsilon} > \tilde{\epsilon}_1$, $\tilde{\epsilon}_2 < \tilde{\epsilon} < \tilde{\epsilon}_1$ и $\tilde{\epsilon} < \tilde{\epsilon}_2$

произвольных ρ , то в точке $\tilde{\epsilon}_1$ происходил бы эффективный фазовый переход, связанный с изменением знака $\tilde{\kappa}_2$ (точка $-v/D$ на рис. 3 при $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_1$ сравнивается с -2 , так что $\tilde{\kappa}_2 > 0$ при $\tilde{\epsilon} < \tilde{\epsilon}_1$ и $\tilde{\kappa}_2 < 0$ при $\tilde{\epsilon} > \tilde{\epsilon}_1$): эффективный коэффициент диффузии в уравнении (33) возрастал бы с ростом L при $\tilde{\epsilon} > \tilde{\epsilon}_1$ и убывал при $\tilde{\epsilon} < \tilde{\epsilon}_1$. При больших L распределение $P(\chi)$ было бы с высокой точностью однородным при $\tilde{\epsilon} > \tilde{\epsilon}_1$, тогда как при $\tilde{\epsilon} < \tilde{\epsilon}_1$ стабилизировалось бы некоторое нетривиальное распределение $P_\infty(\chi)$, определяемое ранней стадией эволюции и не обладающее никакой универсальностью.

При наличии ограничения $\rho \gtrsim 1$ такой эффективный фазовый переход не реализуется⁶⁾, но в точке $\tilde{\epsilon}_1$ сохраняется некоторая сингулярность; аналогичная сингулярность имеется в точке $\tilde{\epsilon}_2$. Как ясно из рис. 4, точка $-v/2D$, соответствующая сшивке параболы и константы, при $\tilde{\epsilon} > \tilde{\epsilon}_1$ находится правее

точки -1 , так что

$$\tilde{\kappa}_1 = \tilde{\kappa}_2 \quad \text{при} \quad \tilde{\epsilon} > \tilde{\epsilon}_1. \quad (35)$$

При $\tilde{\epsilon}_2 < \tilde{\epsilon} < \tilde{\epsilon}_1$ точка $-v/2D$ находится между значениями -2 и -1 , а при $\tilde{\epsilon} < \tilde{\epsilon}_2$ — левее точки -2 . Нетрудно видеть, что $\tilde{\kappa}_1$ имеет скачок второй производной при $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_1$, а $\tilde{\kappa}_2$ — аналогичный скачок при $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_2$. Такие скачки могут быть легко обнаружены при использовании уравнения (34): для этого достаточно найти предельное распределение $P_\infty(\chi)$ и обработать $P_L(\chi)$ на зависимость $P_\infty + aP'_\infty + bP''_\infty$: это линейная схема обработки, реализуемая стандартными программами [23]. Условие (15) соответствует большой концентрации слабых примесей: в этом случае коэффициенты в уравнении (27) меняются медленно, что приводит к формированию для $P(\chi)$ гауссовского распределения с переменными параметрами⁷⁾. Оно определяется первыми двумя моментами, что существенно упрощает обработку.

Заметим, что в точке $\tilde{\epsilon}_1$ происходит качественное изменение, состоящее в нарушении равенства (35), тогда как в точке $\tilde{\epsilon}_2$ имеется просто сингулярность.

6. ВОЗМОЖНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ В ОДНОМОВЫХ ВОЛНОВОДАХ

6.1. Аналогия с оптикой

Локализация классических волн обсуждалась во многих работах [10, 11, 24–30], что включает рассмотрение слабой [25] и сильной [26, 27] локализации, поглощение вблизи порога подвижности фотонов [24], ближнеполевое исследование интенсивности оптических мод в неупорядоченных волноводах [29], и множество других аспектов (см. обзор [28]). Использование трансфер-матриц в этом контексте обсуждалось в работах [10, 11, 30]. В применении к оптике соответствующий анализ сводится к нескольким простым соотношениям.

Распространение электромагнитной волны в однородной диэлектрической среде описывается волновым уравнением

$$c^2 \Delta \Psi - n^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (36)$$

где Ψ — любая компонента электрического или маг-

⁶⁾ Не исключено, что при некоторых специальных условиях логнормальное распределение может распространяться в область малых ρ и этот вывод может быть пересмотрен.

⁷⁾ Сказанное справедливо в случае достаточно сильной локализации распределения $P(\chi)$; в общем случае оно имеет вид суммы гауссовских функций, центры которых разнесены на 2π , что обеспечивает 2π -периодичность решения.

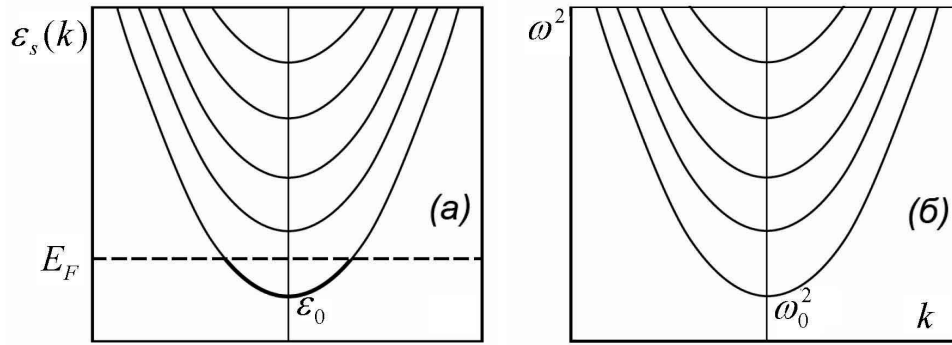


Рис. 5. Спектры электронов в металлической проволоке (а) и волн в металлическом волноводе (б)

нитного поля. В пространственно-неоднородной системе показатель преломления n флуктуирует при изменении координаты x , т. е.

$$n^2(x) = n_0^2 + \delta n^2(x), \quad (37)$$

что для монохроматической волны $\Psi \sim e^{i\omega t}$ приводит к уравнению

$$\tilde{c}^2 \Delta \Psi + \left[\omega^2 + \omega^2 \frac{\delta n^2(x)}{n_0^2} \right] \Psi = 0, \quad \tilde{c} = c/n_0, \quad (38)$$

структура которого соответствует уравнению Шредингера для электрона с энергией $\mathcal{E}$ и массой m в случайном потенциале $V(x)$. При этом имеет место соответствие

$$\mathcal{E} \iff \omega^2, \quad \frac{1}{2m} \iff \tilde{c}^2, \quad V(x) \iff -\omega^2 \frac{\delta n^2(x)}{n_0^2}. \quad (39)$$

Некоторое отличие от физики конденсированного состояния связано с зависимостью $V(x)$ от ω (а следовательно, от $\mathcal{E}$), что не играет существенной роли, если ограничиться небольшим интервалом частот в непрерывном спектре.

Спектр волн в металлическом волноводе аналогичен спектру электронов в металлической проволоке. В последнем случае поперечное движение заковано, что дает набор дискретных уровней ϵ_s . С учетом продольного движения эти уровни превращаются в одномерные зоны с законами дисперсии (рис. 5 а)

$$\epsilon_s(k) = \epsilon_s + k^2/2m. \quad (40)$$

Для получения строго одномерной системы уровень Ферми должен быть достаточно мал, чтобы была заполнена только нижняя зона. При наличии примесей нижняя граница спектра ϵ_0 размывается за счет появления флуктуационных состояний при $\mathcal{E} < \epsilon_0$.

Зависимости на рис. 1 соответствуют энергии $\mathcal{E}$, отсчитанной от ϵ_0 .

Аналогично, в металлическом волноводе квантование поперечного движения дает набор дискретных частот ω_s , таких что $\omega_s = \tilde{\kappa}_s$, где $-\kappa_s^2$ есть собственное значение двумерного оператора Лапласа с соответствующими граничными условиями [31]. Нулевое собственное значение возможно лишь в случае, когда поперечное сечение волновода является многосвязным (как в коаксиальном кабеле). Для односвязного сечения минимальное значение ω_0 конечно [31], и с учетом продольного движения имеем следующие ветви спектра (рис. 5 б)

$$\omega_s^2(k) = \omega_s^2 + \tilde{c}^2 k^2. \quad (41)$$

Для реализации одномодового режима нужно работать вблизи нижней границы спектра ω_0 . При наличии беспорядка нижняя граница ω_0 размывается за счет появления флуктуационных состояний. Таким образом, все эффекты, которые имеют место в электронной системе при изменении уровня Ферми, могут наблюдаться в одномодовом волноводе при изменении частоты ω в окрестности ω_0 .

Спектр на рис. 5 б справедлив для металлического волновода, представляющего собой полую металлическую трубу, которая может быть заполнена непоглощающим диэлектриком. Последний случай (диэлектрический волновод с металлическим покрытием) представляет основной интерес для наших целей ввиду возможности внесения примесей, обеспечивающих достаточно сильное упругое рассеяние. Толщина металлического покрытия должна быть порядка глубины скин-слоя, чтобы обеспечить частичную прозрачность для электрического поля (разд. 6.4). В металлическом волноводе поперечное движение ограничено потенциальной ямой с беско-

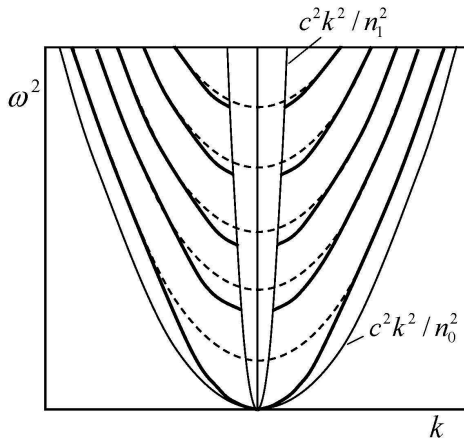


Рис. 6. Спектр волн в диэлектрическом волноводе с показателем преломления n_0 внутри волновода и n_1 в окружающем пространстве. При больших ω спектр такой же, как в металлическом волноводе (стенки потенциальной ямы почти бесконечны); при уменьшении ω возникают отклонения от параболической зависимости, показанной пунктиром. Ограничение снизу для разрешенных значений продольного импульса k возникает из-за нарушения при малых k условий для полного внутреннего отражения. Исчезновение граничной частоты ω_0 связано с тем, что величина κ_0^2 ограничена сверху глубиной потенциальной ямы, пропорциональной ω^2 .

нечными стенками, так что множитель ω^2 в (39) не имеет значения и параметры κ_s являются константами, зависящими лишь от формы поперечного сечения волновода; соответственно, спектр на рис. 5 является строго параболическим.

При отсутствии металлического покрытия (чисто диэлектрический волновод) поперечное движение ограничено потенциальной ямой с конечными стенками, поэтому зависимость эффективного потенциала $V(x)$ от частоты (см. (39)) становится существенной. Параметры κ_s перестают быть постоянными и приобретают зависимость от ω , что приводит к отклонениям от параболической зависимости в координатах (ω^2, k) . В частности, величина κ_0^2 ограничена глубиной потенциальной ямы, пропорциональной ω^2 , что приводит к исчезновению граничной частоты ω_0 (рис. 6). Кроме того, возникают ограничения снизу на разрешенные значения продольного импульса k , связанные с нарушением при малых k условий для полного внутреннего отражения. В обычном уравнении Шредингера связанные состояния в потенциальной яме $V(x)$ лежат в энергетическом интервале $V_{\min} < \mathcal{E} < V_{\infty}$, где $V_{\min}$ — минимальное значение потенциала $V(x)$, а V_{∞} — его предельное (постоянное) значение на бесконечности.

В диэлектрическом волноводе аналогичное условие имеет вид $n_1^2 \omega^2 < c^2 k^2 < n_0^2 \omega^2$, где n_0 и n_1 — показатели преломления внутри волновода и в окружающем пространстве: в результате спектр волн в волноводе ограничен двумя параболой (рис. 6). Нетрудно видеть, что в случае чисто диэлектрического волновода аналогия с электронными системами нарушена: отсутствует все, что соответствует запрещенной зоне, и некоторые отличия возникают вблизи края зоны. Однако разрешенная зона остается доступной для исследования⁸⁾: в частности, фазовый переход в распределении $P(\psi)$ находится в разрешенной зоне (рис. 1 б) и может сохраняться в диэлектрическом волноводе (хотя это нельзя утверждать на формальном уровне). Его сохранение вероятно, если беспорядок достаточно сильный и ожидаемый переход попадает в область, где отличие реального спектра от параболического не слишком велико.

6.2. Регистрация фазового перехода в распределении $P(\psi)$

Пусть слева на волновод падает волна единичной амплитуды, которая с амплитудой t проходит через весь волновод, и с амплитудой r отражается (рис. 7). Если в волноводе есть точечные рассеиватели, то на каждом из них происходит частичное отражение. Поэтому в произвольной точке x волновода мы имеем суперпозицию двух волн, движущихся в

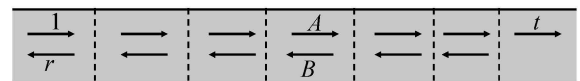


Рис. 7. Распространение волны в волноводе с точечными рассеивателями

противоположных направлениях; электрическое поле $E(x, t)$ определяется ее действительной частью:

$$E(x, t) = \text{Re} [Ae^{ikx+i\omega t} + Be^{-ikx+i\omega t}] . \quad (42)$$

Если трансфер-матрица T определяется согласно (1), (2), то амплитуды волн в суперпозиции (42) определяются соотношением

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |t|\sqrt{\rho+1}e^{i\varphi-i\varphi_0} \\ |t|\sqrt{\rho}e^{-i\theta-i\varphi_0} \end{pmatrix}, \quad (43)$$

⁸⁾ В экспериментальном плане чисто диэлектрический волновод имеет преимущества, связанные с отсутствием омических потерь в металлическом покрытии.

где ρ , φ , θ зависят от x и принято $t = |t|e^{-i\varphi_0}$. Если амплитуда $|t|$ достаточно мала, то величина ρ велика почти во всем волноводе (за исключением окрестности правого края). Тогда $|A| \approx |B|$, и в этом приближении (42) дает

$$E(x, t) = \text{Re}[|A|e^{ikx+i\omega t+i\varphi-i\varphi_0} + |B|e^{-ikx+i\omega t-i\theta-i\varphi_0}] \approx 2|A|\cos(kx + \chi/2)\cos(\omega t - \psi/2 - \varphi_0), \quad (44)$$

так что фаза χ определяет координатную, а фаза ψ — временную зависимость. Фазы ψ и χ остаются постоянными в промежутках между рассеивателями и изменяются скачком при прохождении через рассеиватель. При большой концентрации примесей их координатная зависимость становится практически непрерывной и соответствует случайным флуктуациям на масштабе длины рассеяния.

Поскольку поле $E(x, t)$ в принципе измеримо, то обе фазы χ и ψ теоретически наблюдаемы. В этом принципиальное отличие от физики конденсированного состояния, где суперпозиция волн относится к волновой функции, и для перехода к наблюдаемым величинам должна возводиться по модулю в квадрат: при этом фаза ψ оказывается не наблюдаемой в принципе. Однако фаза ψ становится ненаблюдаемой и в оптике, если измеряется только средняя интенсивность, т. е. если (44) возводится в квадрат и усредняется по времени. Нетрудно проверить, что этот вывод сохраняется и при условии $|A| \neq |B|$.

Тем не менее, появление мнимой части ψ возможно зарегистрировать и в этом случае. Полагая

$$\varphi = \varphi' + i\varphi'', \quad \theta = \theta' + i\theta'', \quad (45)$$

имеем для амплитуд в линейной комбинации (42)

$$|A| = |t|\sqrt{\rho+1}e^{-\varphi''}, \quad |B| = |t|\sqrt{\rho}e^{\theta''}. \quad (46)$$

Для сохранения потока⁹⁾ должно выполняться условие $|A|^2 = |B|^2 + |t|^2$, которое сводится к

$$(\rho+1)e^{-\varphi''} = \rho e^{\theta''} + 1 \quad (47)$$

и при больших ρ дает $\theta'' = -\varphi''$. Нетрудно видеть, что мнимая часть отсутствует у фазы χ , но является

допустимой для фазы ψ ; при этом $\psi'' = 2\theta'' = -2\varphi''$, и в частности

$$|A| = |t|\sqrt{\rho+1}e^{\psi''/2}. \quad (48)$$

Критическое поведение мнимой части ψ может быть установлено из общих соображений. Пусть имеется уравнение $F(x) = 0$, где функция $F(x)$ регулярным образом зависит от некоторого внешнего параметра ϵ . Если при пересечении точки $\epsilon = 0$ два действительных корня становятся комплексными, то при $\epsilon = 0$ имеется кратный корень $x = p$, в окрестности которого (в предположении конечности первой производной по ϵ) уравнение имеет вид

$$(x-p)^2 - a\epsilon = 0, \quad (49)$$

что при $a\epsilon > 0$ дает корни $p \pm \sqrt{a\epsilon}$, а при $a\epsilon < 0$ корни $p \pm i\sqrt{|a\epsilon|}$. Таким образом, появление мнимой части x связано с корневой сингулярностью. Согласно разд. 3, мнимая часть ψ возникает в результате подбора параметров s и w_0 , обеспечивающих правильные значения v и D в логнормальном распределении (10). Тем самым s и w_0 определяются решением некоторых уравнений, численный анализ которых показывает [17], что появление мнимой части w_0 связано со слиянием двух действительных корней и последующим их переходом в комплексную плоскость¹⁰⁾. Поэтому приведенные выше соображения имеют прямое отношение к делу: если мнимая часть ψ появляется при $\omega < \omega_c$, то она имеет поведение¹¹⁾

$$\psi'' \sim \sqrt{\omega_c - \omega} \Theta(\omega_c - \omega). \quad (50)$$

Согласно [17], распределение $P(\rho)$ не имеет сингулярности при $\omega = \omega_c$ (рис. 1 б). Это относится к значению ρ в любой точке волновода, и в частности к ее значению на полной длине L , которое связано с t соотношением $|t| = (1 + \rho)^{-1/2}$. Поэтому сингулярность в (48) всецело определяется величиной ψ'' и имеет корневой характер. Корневые сингулярности в точке $\mathcal{E}_0$ визуальны различимы на рисунках 8 и 11 работы [17], хотя и получены в результате численного анализа.

Общая картина представляется следующим образом. Модуль A меняется внутри волновода в основном по экспоненциальному закону $|A| \sim e^{-\alpha x}$, но

¹⁰⁾ Второй действительный корень соответствует нефизической ветви и потому не обсуждался в [17].

¹¹⁾ Обычно в теории фазовых переходов корневое поведение параметра порядка соответствует теории среднего поля, тогда как учет флуктуаций приводит к формированию нетривиального критического индекса β , меньшего, чем $1/2$. В настоящее время мы не видим никаких оснований для реализации такого сценария.

⁹⁾ Рассеяние предполагается чисто упругим. Неизбежные омические потери в металлическом покрытии волновода считаются достаточно слабыми для доминирования локализационных эффектов. Достаточно сильное упругое рассеяние в принципе может быть обеспечено: так в случае оптоволокна считается установленным, что рассеяние на примесях является главным для не слишком чистых волокон [32].

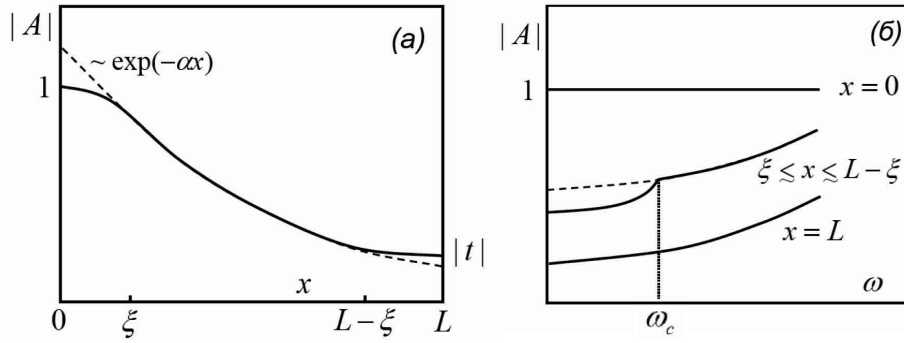


Рис. 8. (а) Зависимость амплитуды A проходящей волны от координаты x внутри волновода. (б) Зависимость $|A|$ от частоты в окрестности фазового перехода

от него имеются отклонения на расстоянии порядка ξ от краев системы, связанные с влиянием граничных условий (рис. 8 а); при этом $|A| = 1$ для $x = 0$ и $|A| = |t|$ для $x = L$. Последняя величина связана с ρ и потому регулярна по ω . Однако вдали от краев волновода величина $|A|$ имеет корневую сингулярность (рис. 8 б), которая может быть зафиксирована уже при измерении средней интенсивности. Такая сингулярность является наблюдаемой в конкретной точке системы для конкретной реализации потенциала, поскольку переход от истинной к псевдо-трансфер-матрице происходит при энергии, соответствующей перенормированному краю зоны, сдвинутого за счет случайного потенциала¹²⁾. Этот сдвиг меняется от точки к точке (см. примечание 2), но для функции распределения в целом соответствует строго определенной энергии. Поэтому и моменты распределения фазы также имеют корневую сингулярность (см. конец разд. 6.3).

Согласно [17], точка перехода $\mathcal{E}_0$ находится в разрешенной зоне на расстоянии порядка $W^{4/3}$ от края зоны (рис. 1 б). Соответственно, в оптике точка ω_c оказывается больше граничной частоты ω_0 , а расстояние между ними определяется степенью беспорядка.

6.3. Наблюдаемость фаз ψ и χ

Измерение временной зависимости на оптических частотах, как правило, невозможно. Однако

¹²⁾ В этом случае корневая сингулярность может быть получена тривиально из поведения истинной и псевдо-трансфер-матрицы для точечного рассеивателя при приближении к краю исходной зоны (см. работу [15]) с учетом его флуктуационного сдвига.

наблюдаемость фазы ψ может быть обеспечена с помощью гетеродинной техники, когда к измеряемому полю $E(x, t)$ добавляется вспомогательное поле $E_s(x, t)$, частота которого сдвинута на малую величину Ω :

$$E + E_s = \text{Re} \left\{ |E| e^{i\omega t + i\varphi_E} + |E_s| e^{i(\omega + \Omega)t + i\varphi_s} \right\}. \quad (51)$$

Переходя к интенсивности и усредняя быстрые осцилляции по времени, имеем

$$\begin{aligned} 2\overline{(E + E_s)^2} &= \\ &= |E|^2 + |E_s|^2 + 2|E||E_s| \cos(\Omega t + \varphi_s - \varphi_E), \end{aligned} \quad (52)$$

так что фаза φ_E входит в комбинации с Ωt , что обеспечивает возможность ее измерения. Для поля $E(x, t)$, соответствующего результату (44), получим

$$\begin{aligned} 2\overline{(E + E_s)^2} &= \{4|A|^2 \cos^2(kx + \chi/2) + |E_s|^2\} + \\ &+ 2|A| \cos(kx + \chi/2) \times \\ &\times 2|E_s| \cos(\Omega t + \psi/2 + \varphi_0 + \varphi_s), \end{aligned} \quad (53)$$

так что обе фазы χ и ψ оказываются наблюдаемыми, и могут быть извлечены из эксперимента путем следующей обработки.

Стационарный первый член в правой части (53) и осциллирующий по времени второй член можно разделить путем Фурье-анализа. Постоянный вклад $|E_s|^2$ легко отделяется, так как минимальное значение первого члена в фигурной скобке равно нулю. Поскольку косинус меняется регулярным образом и меняет знак при каждом прохождении через ноль, то квадратный корень из первого члена в фигурной

скобке может быть извлечен с точностью до несущественного общего знака. В результате известны по отдельности две комбинации

$$|A| \cos(kx + \chi/2) \text{ и } |E_s| \cos(\Omega t + \psi/2 + \varphi_0 + \varphi_s). \quad (54)$$

Множитель $|E_s|$ во второй комбинации определяется по амплитуде осцилляций по времени¹³⁾, после чего зависимость этой комбинации от x может быть приписана фазе ψ .

Обработка первой комбинации в (54) осложняется тем, что $|A(x)|$ не следует строго экспоненциальной зависимости $\exp(-\alpha x)$, но имеет существенные флуктуации вокруг нее, определяясь логнормальным распределением (10). Правильная обработка представляется следующим образом.

1. Определить k по среднему периоду осцилляций.

2. Найти значения χ в дискретных точках — максимумах, минимумах и нулях осциллирующей зависимости — по отклонению их положения от чистого косинуса. Если значение k выбрано правильно, то получаемые значения χ будут флуктуировать вблизи постоянного уровня и не будут иметь систематического роста. Это определяет массив данных для анализа распределения χ .

3. Определить значения $|A(x)|$ в точках максимумов и минимумов. Это позволяет набрать статистику для проверки логнормального распределения и выявления систематических отклонений от экспоненциальной зависимости на краях волновода.

Наблюдаемость фазы ψ дает дополнительные возможности для регистрации фазового перехода в распределении $P(\psi)$. Если от ψ перейти к переменной w , определенной в (11), то моменты распределения $P(w)$ (в частности $\langle w \rangle$) будут иметь сингулярности $\sqrt{\omega - \omega_c}$ в области $\omega > \omega_c$. Фаза χ не влияет на эволюцию распределения сопротивлений и потому не изучалась в работах [16, 17]. Однако ее наблюдаемость в оптике делает такие исследования актуальными.

6.4. Возможные схемы измерений

Измерение электрического поля внутри волновода возможно с помощью сканирующего оптического микроскопа ближнего поля [33–35]. Есть две разновидности такого микроскопа — детектирующий

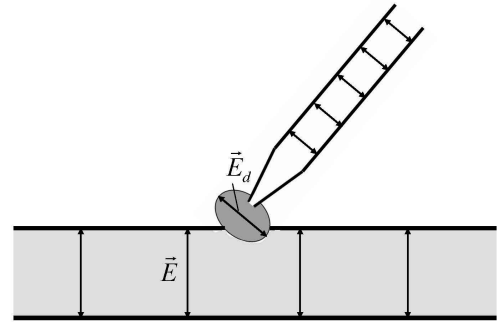


Рис. 9. Измерение поля в волновде с помощью сканирующего оптического микроскопа ближнего поля

и рассеивающий: в зависимости от этого возможны две различные схемы измерений. Сопоставление этих двух схем приводит к комбинированному варианту, в котором проблема детектирования сводится к атомно-силовой [36, 37] или туннельной [38] микроскопии.

Детектирующий режим. В этом случае игла оптического микроскопа (отрезок оптоволокна с металлическим покрытием) представляет собой волновод с сужением на конце и отверстием диаметра d , меньшим длины волны (рис. 9). Создаваемое им поле в ближней зоне можно представлять в виде «облака» конечного объема $V_d \sim d^3$ (см. рис. 4 в работе [35]), электрическое поле $\mathbf{E}_d$ в котором приблизительно постоянно и ориентировано параллельно полю внутри иглы. Пусть игла микроскопа имеет определенный наклон и приближается к поверхности изучаемого волновода, так что некоторый объем V «облака» проникает внутрь волновода (рис. 9). Если $\mathbf{E}$ — электрическое поле внутри волновода, то изменение энергии за счет проникновения «облака» определяется выражением

$$[(\mathbf{E} + \mathbf{E}_d)^2 - \mathbf{E}^2 - \mathbf{E}_d^2] V = 2\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_d V. \quad (55)$$

При малых смещениях иглы x изменение объема пропорционально смещению, $\delta V = Sx$, где S — площадь пересечения «облака» с поверхностью волновода. Поэтому сила, действующая на иглу микроскопа, определяется выражением (55) с заменой V на S и зависит от измеряемого поля. Она может быть преобразована в смещение иглы или изменение напряжения, удерживающего иглу в неизменном положении. В реальности поле $\mathbf{E}_d$ зависит от координат и вместо (55) нужно писать

$$\int 2\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_d(\mathbf{r}) d^3 r \quad (56)$$

¹³⁾ Другой способ обработки состоит в том, чтобы провести измерения при нескольких значениях $|E_s|$ и обработать (53) на зависимость $\alpha + \beta|E_s| + \gamma|E_s|^2$.

с интегрированием по объему волновода, что в результате грубой оценки интеграла возвращает к (55).

Считая, что $E \sim E_d$ и вводя атомные единицы напряженности поля и силы

$$E_0 = \frac{e}{a^2} \sim 10^9 \text{ В/см}, \quad F_0 = \frac{e^2}{a^2} \sim 10^{-2} \text{ дин}, \quad (57)$$

получим оценку силы, действующей на иглу

$$F \sim F_0 \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \left(\frac{d}{a} \right)^2. \quad (58)$$

Поскольку размер отверстия d ограничен условием $d \lesssim \lambda \sim 10^4 a$, то можно считать, что

$$F \sim 10^6 \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \text{ дин}. \quad (59)$$

Максимальное значение поля ограничено полем пробоя диэлектрика порядка 10^7 В/см . Если в качестве предела чувствительности принять величину $F \sim 10^{-8} \text{ дин}$, характерную для туннельной микроскопии [38], то имеется широкий интервал полей

$$10^{-7} E_0 \lesssim E \lesssim 10^{-2} E_0, \quad (60)$$

для которых изложенная схема является реалистичной.

Если в качестве E_d используется поле E_s со сдвинутой частотой (см. (51)), то сила, действующая на иглу, определяется величиной

$$F \sim S|A||E_s| \times$$

$$\times \cos(kx + \chi/2) \cos(\Omega t + \psi/2 + \varphi_0 + \varphi_s), \quad (61)$$

обработка которой даже проще, чем выражения (53). Выше мы не учитывали наличие полупроницаемого металлического покрытия (разд. 6.1) и отличие от единицы диэлектрической проницаемости внутри волновода. Учет этих факторов приводит к добавлению в правой части (61) аддитивного слагаемого порядка E_s^2 , не зависящего от измеряемого поля и легко отделяемого при обработке.

Общая схема измерений представляется следующим образом (рис. 10). Луч от лазера расщепляется на две части, одна из которых направляется в волновод. Вторая часть падает на осциллирующее зеркало, что приводит к сдвигу частоты на величину Ω за счет эффекта Доплера. Поскольку скорость зеркала является переменной, то это приводит к переменнойности Ω . Эту проблему можно решить, регистрируя временную зависимость в дискретных точках,

отстоящих на период колебаний зеркала; другая возможность состоит в реализации не гармонического, а пилообразного режима колебаний. От зеркала луч направляется в иглу микроскопа, на конде которой возникает поле $E + E_s$, что позволяет измерять координатную зависимость поля E в результате сканирования поверхности волновода.

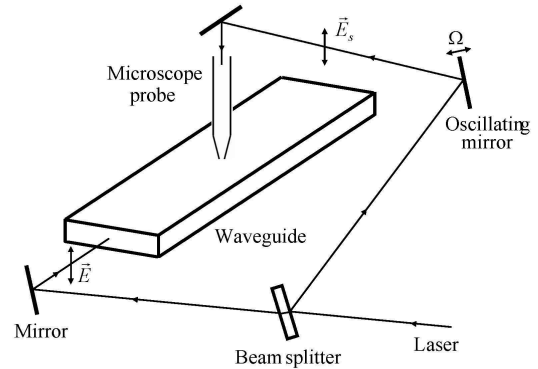


Рис. 10. Общая схема измерений в детектирующем режиме оптического микроскопа ближнего поля

Рассеивающий режим. В этом случае игла оптического микроскопа используется не для непосредственного детектирования, а лишь как источник рассеяния¹⁴. Распространяющаяся в волноводе волна за счет туннельного эффекта частично выходит за пределы волновода и может рассеиваться на кончике иглы, находящемся близко к поверхности. Рассеяние можно считать рэлеевским, и электрическое поле в рассеянной волне оказывается пропорциональным полю $E(x, t)$ в волноводе¹⁵ в точке рассеяния x .

Общая схема измерений выглядит следующим образом (рис. 11). Луч от лазера расщепляется на две части, одна из которых направляется в волновод и рассеивается на игле микроскопа. Рассеянный свет собирается параболическим зеркалом и направляется на смеситель. Вторая часть лазерного луча падает на осциллирующее зеркало и приобретает сдвиг

¹⁴ Ее можно заменить иглой туннельного микроскопа, что при наличии металлического покрытия (разд. 6.1) позволяет использовать все преимущества сканирующей туннельной микроскопии [38].

¹⁵ При рэлеевском рассеянии поле рассеянной волны в главном приближении определяется электрическим полем падающей волны и не зависит от волнового вектора последней [31]. Поэтому две волны, входящие в суперпозицию (42), рассеиваются одинаково, и суммарное поле рассеянной волны пропорционально полю в волноводе.

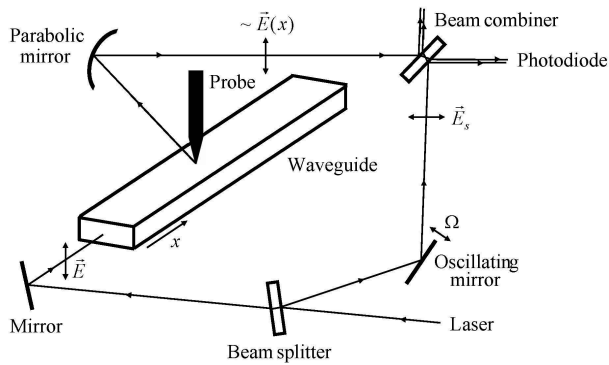


Рис. 11. Схема измерений электрического поля в волноводе для рассеивающего режима оптического микроскопа ближнего поля

частоты Ω за счет эффекта Доплера. От зеркала луч направляется на смеситель, где соединяется с первым лучом и направляется на фотодиод для измерения интенсивности. Изложенная схема практически реализована в работе [39], где можно найти недостающие экспериментальные детали.

Комбинированная схема отличается от рис. 10 тем, что второй луч от зеркала идет не в иглу микроскопа, а направляется к волноводу, просвечивая его в поперечном направлении вблизи поверхности (рис. 12). Поскольку поле $\mathbf{E}$ за счет туннельного эффекта выходит за пределы волновода, то вблизи его поверхности имеется поле $\mathbf{E} + \mathbf{E}_s$, энергия которого изменяется при приближении иглы микроскопа за счет диэлектрической поляризуемости последней. В результате сила, действующая на иглу, пропорциональна интенсивности поля $\mathbf{E} + \mathbf{E}_s$ и проблема ее измерения сводится к атомно-силовой [36, 37] или туннельной [38] микроскопии.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше показано, что все результаты, полученные для электронов в одномерных неупорядоченных системах, непосредственно применимы к рассеянию волн, распространяющихся в одномодовых волноводах. Современные оптические методы позволяют измерять все параметры ρ , ψ , χ , входящие в трансфер-матрицу. В результате становится возможным наблюдение фазового перехода в распределении фазы ψ , который выглядит ненаблюдаемым в контексте физики конденсированного состояния.

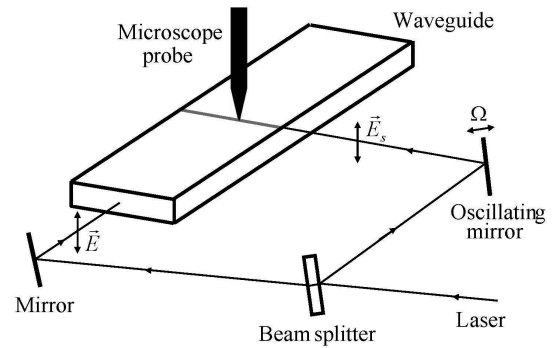


Рис. 12. Измерение электрического поля в волноводе с помощью атомно-силового или туннельного микроскопа

Наблюдаемость фазы χ делает актуальным вывод уравнения для эволюции ее распределения, которое не изучалось в предыдущих работах. При больших L распределение χ имеет сингулярности, состоящие в скачках второй производной для показателей экспонент, описывающих релаксацию $P_L(\chi)$ к предельному распределению $P_\infty(\chi)$.

Как указано выше, одна из измерительных схем, описанных в разд. 6.4 была реализована в работе [39]. В отличие от экспериментов [40, 41], где измерялась только матрица передачи, в работе [39] предложен подход, позволяющий измерять распределение фаз внутри волновода. Однако проведенные в [39] измерения не связаны с распространением света в неупорядоченных системах, а лишь с исследованием регулярных мод в однородных волноводах.

Существенно новые эксперименты требуются для проверки справедливости утверждений, сделанных в настоящей работе. Прежде всего, в таких экспериментах должен использоваться перестраиваемый лазер, позволяющий изменять частоту излучения, а его частотный диапазон должен покрывать положение ожидаемого фазового перехода. Последнее требует установить наиболее подходящую конфигурацию волновода и его размеры. Требуется разработать эффективный метод для внесения в волновод большой концентрации примесей. Необходим подробный анализ для нахождения области параметров, в которой упругое рассеяние доминирует над поглощением внутри волновода и радиационными потерями через его стенки. Последняя проблема несколько смягчается при использовании чисто диэлектрического волновода, но в этом случае аналогия с электронными

неупорядоченными системами становится неполной (разд. 6.1).

Можно надеяться, что полученные результаты будут стимулировать экспериментальные исследования в этой области и приведут к более глубокому пониманию эффектов локализации как в электронных, так и оптических системах.

Благодарности. Автор признателен С. И. Божевольному за обсуждение оптических аспектов работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ $P(\rho, \psi, \chi)$

Приводимый ниже вывод уравнения эволюции отличается от такового в работах [16, 17]: он приводит к более длинным выкладкам, но является более систематическим, гарантируя получение результата в условиях, когда его характер заранее неизвестен. Более компактный способ вывода, приведенный в [16, 17], может быть найден лишь при наличии некоторой информации о структуре результата.

Как ясно уже на уровне соотношений (18), (19), (20), (22), величина ψ входит в уравнения эволюции в виде двух комбинаций $\psi - \gamma$ и $\psi - \beta$, так что сдвигом $\psi \rightarrow \psi + \psi_0$ параметр γ может быть приведен к значению $-\pi/2$, соответствующему резкой границе раздела [17]; для упрощения формул мы ограничимся этим случаем. Соотношения (12)–(14) в низшем порядке по δ дают

$$\begin{aligned} T_{11}^{(n+1)} &= (1 + i\alpha - i\epsilon_n)T_{11}^{(n)} + (\delta_1 - i\delta_2 + i\epsilon_n)T_{12}^{(n)}, \\ T_{12}^{(n+1)} &= (\delta_1 + i\delta_2 - i\epsilon_n)T_{11}^{(n)} + (1 - i\alpha + i\epsilon_n)T_{12}^{(n)} \quad (A.1) \end{aligned}$$

и аналогичные уравнения для $T_{21}^{(n)}$ и $T_{22}^{(n)}$, получаемые комплексным сопряжением; здесь $\delta_1 = \Delta \cos \beta$, $\delta_2 = \Delta \sin \beta$. Полагая

$$T_{11}^{(n)} = x_n + iy_n, \quad T_{12}^{(n)} = z_n + iw_n, \quad (A.2)$$

имеем

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - (\alpha - \epsilon_n)y_n + \delta_1 z_n + (\delta_2 - \epsilon_n)w_n, \\ y_{n+1} &= (\alpha - \epsilon_n)x_n + y_n - (\delta_2 - \epsilon_n)z_n + \delta_1 w_n, \\ z_{n+1} &= \delta_1 x_n - (\delta_2 - \epsilon_n)y_n + z_n + (\alpha - \epsilon_n)w_n, \quad (A.3) \\ w_{n+1} &= (\delta_2 - \epsilon_n)x_n + \delta_1 y_n - (\alpha - \epsilon_n)z_n + w_n, \end{aligned}$$

что при записи в матричной форме дает матрицу с единичным детерминантом. Если распределение

$P_n(x_n, y_n, z_n, w_n)$ на n -м шаге известно, то аналогичное распределение на $(n+1)$ -м шаге составляется по правилу

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}, \tilde{z}_{n+1}, \tilde{w}_{n+1}) &= \int d\epsilon_n dx_n dy_n dz_n dw_n \times \\ &\times P(\epsilon_n) P_n(x_n, y_n, z_n, w_n) \delta(\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1}) \times \\ &\times \delta(\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}) \delta(\tilde{z}_{n+1} - z_{n+1}) \delta(\tilde{w}_{n+1} - w_{n+1}), \end{aligned} \quad (A.4)$$

где $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, w_{n+1}$ выражаются через x_n, y_n, z_n, w_n по формуле (A.3). Обратим соотношение (A.3) и перейдем к интегрированию по $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, w_{n+1}$; учитывая, что якобиан преобразования равен единице, а δ -функции тривиально снимаются, получим

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, w_{n+1}) &= \\ &= \int d\epsilon_n P(\epsilon_n) P_n(x_n, y_n, z_n, w_n), \quad (A.5) \end{aligned}$$

где x_n, y_n, z_n, w_n выражаются через $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, w_{n+1}$ соотношением, обратным (A.3). Раскладываясь по отклонениям $x_{n+1} - x_n, y_{n+1} - y_n, \dots$ и сохраняя члены первого порядка по α, Δ и второго по ϵ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial n} &= \alpha \left[y \frac{\partial P}{\partial x} - x \frac{\partial P}{\partial y} - w \frac{\partial P}{\partial z} + z \frac{\partial P}{\partial w} \right] - \\ &- \delta_1 \left[z \frac{\partial P}{\partial x} + w \frac{\partial P}{\partial y} + x \frac{\partial P}{\partial z} + y \frac{\partial P}{\partial w} \right] + \\ &+ \delta_2 \left[-w \frac{\partial P}{\partial x} + z \frac{\partial P}{\partial y} + y \frac{\partial P}{\partial z} - x \frac{\partial P}{\partial w} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \epsilon^2 (w - y)^2 \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \epsilon^2 (x - z)^2 \left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial w} + \frac{\partial^2 P}{\partial w^2} \right] + \\ &+ \epsilon^2 (x - z)(w - y) \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial w} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial w} \right]. \end{aligned} \quad (A.6)$$

Переходя к полярным координатам

$$\begin{aligned} x &= r_1 \cos \varphi, \quad y = r_1 \sin \varphi, \\ z &= r_2 \cos \theta, \quad w = r_2 \sin \theta, \end{aligned} \quad (A.7)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial n} &= \alpha [-P'_\varphi + P'_\theta] - \Delta \cos(\theta - \varphi - \beta) [r_2 P'_{r_1} + r_1 P'_{r_2}] + \\ &+ \Delta \sin(\theta - \varphi - \beta) \left[\frac{r_1}{r_2} P'_\theta - \frac{r_2}{r_1} P'_\varphi \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left\{ \sin^2(\theta - \varphi) [r_2^2 P''_{r_1 r_1} + 2r_1 r_2 P''_{r_1 r_2} + r_1^2 P''_{r_2 r_2}] + \right. \\
& + 2 \sin(\theta - \varphi) [r_1 - r_2 \cos(\theta - \varphi)] \left[\frac{r_2}{r_1} P''_{r_1 \varphi} + P''_{r_2 \varphi} - \frac{r_2}{r_1^2} P'_\varphi \right] + \\
& + 2 \sin(\theta - \varphi) [r_1 \cos(\theta - \varphi) - r_2] \left[\frac{r_1}{r_2} P''_{r_2 \theta} + P''_{r_1 \theta} - \frac{r_1}{r_2^2} P'_\theta \right] + \\
& + [r_1 - r_2 \cos(\theta - \varphi)]^2 \left[\frac{1}{r_1^2} P''_{\varphi \varphi} + \frac{1}{r_1} P'_{r_1} \right] + \\
& + [r_1 \cos(\theta - \varphi) - r_2]^2 \left[\frac{1}{r_2^2} P''_{\theta \theta} + \frac{1}{r_2} P'_{r_2} \right] + \quad (A.8) \\
& \left. + 2 [r_1 - r_2 \cos(\theta - \varphi)] [r_1 \cos(\theta - \varphi) - r_2] \frac{1}{r_1 r_2} P''_{\varphi \theta} \right\}.
\end{aligned}$$

Теперь перейдем от r_1, r_2 к переменным ρ, ξ :

$$r_1^2 + r_2^2 = 1 + 2\rho, \quad r_1^2 - r_2^2 = \xi. \quad (A.9)$$

Нетрудно проверить, что при этом сокращаются все члены с производными по ξ ; следовательно величина ξ остается постоянной в процессе эволюции, и из физических соображений можно положить $\xi = 1$. Тогда

$$r_1 = \sqrt{1 + \rho}, \quad r_2 = \sqrt{\rho} \quad (A.10)$$

в соответствии с каноническим представлением (2).

При этом уравнение эволюции примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial n} = & \alpha [-P'_\varphi + P'_\theta] - \Delta \cos(\theta - \varphi - \beta) 2r_1 r_2 P'_\rho + \\
& + \Delta \sin(\theta - \varphi - \beta) \left[\frac{r_1}{r_2} P'_\theta - \frac{r_2}{r_1} P'_\varphi \right] + \\
& + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left\{ 4r_1^2 r_2^2 \sin^2(\theta - \varphi) P''_{\rho\rho} + \right. \\
& + [2r_1^2 + 2r_2^2 - 4r_1 r_2 \cos(\theta - \varphi)] P'_\rho + \\
& + 4r_2 \sin(\theta - \varphi) [r_1 - r_2 \cos(\theta - \varphi)] P''_{\rho\varphi} + \\
& + 4r_1 \sin(\theta - \varphi) [r_1 \cos(\theta - \varphi) - r_2] P''_{\rho\theta} - \\
& - 2 \sin(\theta - \varphi) \frac{r_2 [r_1 - r_2 \cos(\theta - \varphi)]}{r_1^2} P'_\varphi - \quad (A.11) \\
& - 2 \sin(\theta - \varphi) \frac{r_1 [r_1 \cos(\theta - \varphi) - r_2]}{r_2^2} P'_\theta + \\
& + \left[\frac{r_1 - r_2 \cos(\theta - \varphi)}{r_1} \right]^2 P''_{\varphi\varphi} + \left[\frac{r_1 \cos(\theta - \varphi) - r_2}{r_2} \right]^2 P''_{\theta\theta} + \\
& \left. + 2 \left[\frac{r_1 - r_2 \cos(\theta - \varphi)}{r_1} \right] \left[\frac{r_1 \cos(\theta - \varphi) - r_2}{r_2} \right] P''_{\varphi\theta} \right\}.
\end{aligned}$$

При заменах (A.7) и (A.9) мы не производили перенормировку вероятности; однако, в результате двух замен имеем

$$4P(x, y, z, w) dx dy dz dw =$$

$$= P(\rho, \xi, \varphi, \theta) d\rho d\xi d\varphi d\theta, \quad (A.12)$$

и указанная перенормировка сводится к постоянному множителю, несущественному ввиду линейности уравнения эволюции. Вводя комбинированные фазы (3), имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial n} = & 2\alpha P'_\psi - \Delta \cos(\psi - \beta) 2r_1 r_2 P'_\rho + \\
& + \Delta \sin(\psi - \beta) \left[\left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} \right) P'_\psi + \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right) P'_\chi \right] + \\
& + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left\{ 4r_1^2 r_2^2 \sin^2 \psi P''_{\rho\rho} + [2r_1^2 + 2r_2^2 - 4r_1 r_2 \cos \psi] P'_\rho + \right. \\
& + 4 \sin \psi (r_1 r_2 - r_2^2 \cos \psi) (-P''_{\rho\psi} + P''_{\rho\chi}) + \\
& + 4 \sin \psi (r_1^2 \cos \psi - r_1 r_2) (P''_{\rho\psi} + P''_{\rho\chi}) - \\
& - 2 \sin \psi \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2^2}{r_1^2} \cos \psi \right) (-P'_\psi + P'_\chi) - \quad (A.13) \\
& - 2 \sin \psi \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \cos \psi - \frac{r_1}{r_2} \right) (P'_\psi + P'_\chi) + \\
& + \left(\frac{r_1 - r_2 \cos \psi}{r_1} \right)^2 (P''_{\psi\psi} - 2P''_{\psi\chi} + P''_{\chi\chi}) + \\
& + \left(\frac{r_1 \cos \psi - r_2}{r_2} \right)^2 (P''_{\psi\psi} + 2P''_{\psi\chi} + P''_{\chi\chi}) + \\
& \left. + \left(\frac{r_1 - r_2 \cos \psi}{r_1} \right) \left(\frac{r_1 \cos \psi - r_2}{r_2} \right) (-P''_{\psi\psi} + P''_{\chi\chi}) \right\}.
\end{aligned}$$

Подставляя (A.10) и приводя правую часть к сумме полных производных, имеем окончательное уравнение эволюции, имеющее структуру (4):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial n} = & = \left\{ -2\Delta \cos(\psi - \beta) \sqrt{\rho(1 + \rho)} P + 2\epsilon^2 \sin^2 \psi \rho(1 + \rho) P'_\rho + \right. \\
& + \epsilon^2 [(1 - 2 \sin^2 \psi)(1 + 2\rho) - 2 \cos \psi \sqrt{\rho(1 + \rho)}] P + \\
& + 2\epsilon^2 \sin \psi [\cos \psi (1 + 2\rho) - 2\sqrt{\rho(1 + \rho)}] P'_\psi \Big\}'_\rho + \\
& + \left\{ [2\alpha + R\Delta \sin(\psi - \beta)] P + \epsilon^2 \sin \psi (R - 2 \cos \psi) P + \right. \\
& + \frac{1}{2} \epsilon^2 (2 - R \cos \psi)^2 P'_\psi \Big\}'_\psi + \quad (A.14) \\
& + \left\{ \frac{\Delta \sin(\psi - \beta) + \epsilon^2 \sin \psi (1 - R \cos \psi)}{\sqrt{\rho(1 + \rho)}} P + \right. \\
& + \frac{\epsilon^2 \cos \psi (R \cos \psi - 2)}{\sqrt{\rho(1 + \rho)}} P'_\psi + \frac{\epsilon^2 \cos^2 \psi}{2\rho(1 + \rho)} P'_\chi \Big\}'_\chi.
\end{aligned}$$

Интегрирование по χ приводит к уравнению эволюции для $P(\rho, \psi)$, полученному в [16, 17], а интегрирование по ρ и ψ — к уравнению (27) для $P(\chi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, and D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **22**, 3519 (1980).
2. R. Landauer, *IBM J. Res. Dev.* **1**, 2 (1957); *Phil. Mag.* **21**, 863 (1970).
3. В. И. Мельников, *ФТТ*, 782 (1981).
4. A. A. Abrikosov, *Sol. St. Comm.* **37**, 997 (1981).
5. N. Kumar, *Phys. Rev. B* **31**, 5513 (1985).
6. B. Shapiro, *Phys. Rev. B* **34**, 4394 (1986).
7. P. Mello, *Phys. Rev. B* **35**, 1082 (1987).
8. B. Shapiro, *Phil. Mag.* **56**, 1031 (1987).
9. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
10. C. W. J. Beenakker, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 731 (1997).
11. X. Chang, X. Ma, M. Yezpez, A. Z. Genack, Москва, P. A. Mello, *Phys. Rev. B* **96**, 180203 (2017).
12. L. I. Deych, D. Zaslavsky, and A. A. Lisyansky, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5390 (1998).
13. L. I. Deych, A. A. Lisyansky, and B. L. Altshuler, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2678 (2000); *Phys. Rev. B* **64**, 224202 (2001).
14. L. I. Deych, M. V. Erementchouk, and A. A. Lisyansky, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 126601 (2001).
15. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **156**, 950 (2019).
16. I. M. Suslov, *Phil. Mag. Lett.* **102**, 255 (2022).
17. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **162**, 750 (2022).
18. S. I. Bozhevolnyi and I. M. Suslov, *Phys. Scr.* **98**, 065024 (2023).
19. I. M. Suslov, *Adv. Theor. Comp. Phys.* **6**, 77 (2023).
20. Н. Мотт, Э. Дэвис, *Электронные процессы в некристаллических веществах*, Мир, Москва (1982).
21. V. V. Brazhkin and I. M. Suslov, *J. Phys. Cond. Matt.* **32**, 35LT02 (2020).
22. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **158**, 911 (2020).
23. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Wetterling, *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press (1992).
24. S. John, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2169 (1984).
25. P. Van Albada and A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2692 (1985).
26. P. W. Anderson, *Philos. Mag. B* **52**, 505 (1985).
27. S. John, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2486 (1987).
28. D. S. Wiersma, *Nature Photon.* **7**, 188 (2013).
29. S. I. Bozhevolnyi, V. S. Volkov, and K. Leosson, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 186801 (2002).
30. Zh. Shi, M. Davy, and A. Z. Genack, *Opt. Express* **23**, 12293 (2015).
31. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
32. Ч. К. Као, *Нобелевская лекция по физике*, УФН **180**, 1350 (2010).
33. D. W. Pohl, W. Denk, and M. Lanz, *Appl. Phys. Lett.* **44**, 651 (1984).
34. D. W. Pohl and L. Novotny, *J. Vac. Sci. Technol. B* **12**, 1441 (1994).
35. A. L. Lereu, A. Passian, and Ph. Dumas, *Int. J. Nanotechnol.* **9**, 488 (2012).
36. G. Binning, C. F. Quate, and C. Gerber, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 930 (1986).
37. E. Meyer, *Progress in Surface Science* **41**, 3 (1992).
38. G. Binning and H. Rohrer, *Helv. Phys. Acta.* **55**, 726 (1982).
39. S. I. Bozhevolnyi, V. A. Zenin, R. Malreanu, I. P. Radko, and A. V. Lavrinenko, *Opt. Express* **24**, 4582 (2016).
40. I. M. Vellekoop and A. P. Mosk, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 120601 (2008).
41. S. M. Popoff, G. Lerosey, R. Carminati, M. Fink, A. C. Boccara, and S. Gigan, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 100601 (2010).