

КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ ТЕЧЕНИЯ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ СЛУЧАЙНОЙ СИЛОЙ НА ФОНЕ СДВИГОВОГО ПОТОКА

И. В. Колоколов^{a,b}, В. В. Лебедев^{a,b}*

*^a Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская область, Россия*

*^b Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 18 сентября 2023 г.,
после переработки 18 сентября 2023 г.
Принята к публикации 19 сентября 2023 г.

Исследуются флуктуации завихренности, возбуждаемые внешней случайной силой в двумерной жидкости в присутствии сильного внешнего сдвигового потока. Задача мотивирована анализом больших когерентных вихрей, возникающих в результате обратного энергетического каскада в конечной ячейке при больших числах Рейнольдса. Развивается теория возмущений для расчета нелинейных поправок к корреляционным функциям флуктуаций потока в предположении, что внешняя сила имеет малое время корреляции. Проанализированы поправки к парной корреляционной функции завихренности и некоторым моментам. Проведенный анализ позволяет установить достоверность теории возмущений для лабораторных экспериментов и численного моделирования.

DOI: 10.31857/S0044451024010127

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная турбулентность — это гидродинамическое течение с большим числом Рейнольдса в пленках жидкости или газа на масштабах, превышающих толщину пленки [1]. С практической точки зрения, наиболее интересной такой «пленкой» является атмосфера. Конечно, атмосфера — очень сложный объект, и ее детальное описание — чрезвычайно сложная задача. Однако некоторые общие особенности двумерной турбулентности могут быть полезны для понимания атмосферных явлений. Обратим внимание в этом отношении на тенденцию образования крупномасштабных вихрей из мелкомасштабных благодаря нелинейному гидродинамическому взаимодействию в двумерных жидкостях [2–4]. При наличии внешнего воздействия (накачки) тенденция приводит к формированию обратного энергетического каскада на масштабах, превышающих длину накачки [5].

В конечной ячейке передача энергии на большие масштабы приводит к образованию больших вихрей диаметром порядка размера ячейки [6, 7]. При некоторых условиях образуются большие когерентные вихри с большим временем жизни. Такие когерентные вихри наблюдались как в лабораторных экспериментах [8, 9], так и при численном моделировании [10]. В работе [11] при численном моделировании наблюдался плоский профиль средней скорости когерентного вихря и были представлены некоторые аргументы, объясняющие этот профиль. В работах [12–16], где был использован квазилинейный режим флуктуаций течения внутри когерентного вихря, получен плоский профиль скорости и обсуждены некоторые корреляционные функции скорости. В работе [17] на основе этого подхода был предложен критерий формирования когерентного вихря. Предсказание качественно подтверждено в ходе прямого численного моделирования [18].

Флуктуации течения внутри когерентного вихря возбуждаются на фоне его среднего течения, которое локально может быть аппроксимировано сдвиговым потоком. Это является мотивацией настоящей работы, в которой мы рассматриваем турбулентное двумерное течение в неограниченной пленке жид-

* E-mail: igor.kolokolov@gmail.com

кости в присутствии сильного сдвигового потока. В нашей теоретической схеме мы предполагаем, что внешняя сила, возбуждающая флуктуации течения на фоне статического сдвигового потока, имеет малое время корреляции. Мы полагаем, что модель отражает общие свойства флуктуаций течения, возбуждаемых внешней случайной силой. Случай, когда время корреляции возбуждающей силы относительно велико (больше, чем обратный темп сдвига), требует дополнительных исследований.

Средний сдвиговый поток нарушает однородность пространства. Этот факт существенно усложняет расчет корреляционных функций флуктуаций течения по сравнению с однородным случаем. Однако можно сформулировать последовательную схему расчета, основанную на ряде теории возмущений. Она основана на представлении корреляционной функции с помощью функциональных интегралов, которые могут быть построены, как в квантовой теории поля. Схема дает члены ряда возмущений, которые могут быть представлены соответствующими диаграммами Фейнмана. Мы анализируем первые члены ряда возмущений и формулируем некоторые его общие свойства. А именно, мы вычисляем флуктуационные поправки к парной корреляционной функции завихренности, ее второму моменту и тензору напряжений Рейнольдса. Расчеты позволяют установить критерий применимости теории возмущений для данного случая.

Мы полагаем, что результаты, полученные для модели, могут быть расширены для объяснения свойств когерентных вихрей. Его средняя скорость — это дифференциальное вращение. При анализе флуктуационных эффектов среднее течение может быть аппроксимировано как сдвиговый поток для расстояний от центра вихря, значительно превышающих длину корреляции накачки. С другой стороны, локальная скорость сдвига среднего вихревого течения уменьшается с увеличением расстояния. Это ограничивает применимость нашего подхода сверху. Таким образом, мы стремимся объяснить свойства когерентного вихря в некоторой области расстояний от центра вихря, которая является наиболее интересной, поскольку именно эта область определяет особенности когерентного вихря.

2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Мы рассматриваем модель неограниченной двумерной жидкости, в которой возбуждается случайное течение. Мы предполагаем, что случайное течение существует на фоне среднего статического

сдвигового потока. Мы выбираем систему отсчета с первой осью, направленной вдоль скорости среднего сдвигового потока. Тогда скорость сдвигового потока имеет единственную первую компоненту $V_1 = \Sigma x_2$, где Σ — темп сдвига и x_2 — вторая координата. Нас интересуют статистические свойства флуктуаций скорости, и мы исследуем эффекты, связанные с их нелинейным взаимодействием. Флуктуации описываются (двумерной) случайной скоростью \mathbf{v} . Течение предполагается несжимаемым: $\nabla \mathbf{v} = 0$.

Имея в виду тонкие пленки жидкости, мы вводим два диссипативных механизма: трение о дно и вязкость. Затем, чтобы поддерживать сдвиговый поток, к жидкости следует приложить внешнюю статическую силу. Кроме того, мы включаем во внешнюю силу, приложенную к жидкости, некоторую случайную составляющую \mathbf{f} , вызывающую флуктуации потока. Предполагается, что сила \mathbf{f} является случайной функцией времени и координат с нулевым средним значением и обладает статистическими свойствами, однородными в пространстве и времени. Мы анализируем статистически стационарное состояние жидкости. Состояние однородно вдоль первой оси, однако однородность вдоль второй оси нарушается из-за наличия сдвигового потока.

Уравнение, управляющее скоростью потока в жидкости, представляет собой двумерное уравнение Навье–Стокса с дополнительным членом, описывающим трение о дно. Выделяя уравнение для случайной скорости \mathbf{v} на фоне сдвигового потока, находим

$$\partial_t \mathbf{v} + \Sigma x_2 \partial_1 \mathbf{v} + \Sigma \mathbf{n} v_2 + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = -\alpha \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

где p — давление, α — коэффициент трения о дно, ν — коэффициент кинематической вязкости и \mathbf{n} — единичный вектор, направленный вдоль первой оси. Заметим, что внешняя сила, поддерживающая сдвиговый поток, равна $\alpha \Sigma x_2 \mathbf{n}$.

В двух измерениях течение удобно описывать в терминах завихренности. Мы вводим завихренность ϖ флуктуирующего потока:

$$\varpi = \text{curl } \mathbf{v} \equiv \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1. \quad (2)$$

Очевидно, ϖ — скалярное (или, точнее, псевдоскалярное) поле. Уравнение, управляющее эволюцией завихренности, получается из уравнения (1):

$$\partial_t \varpi + \mathbf{v} \nabla \varpi + \Sigma x_2 \frac{\partial \varpi}{\partial x_1} = -\alpha \varpi + \nu \nabla^2 \varpi + \phi, \quad (3)$$

где

$$\phi = \text{curl } \mathbf{f} \equiv \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1.$$

Чтобы замкнуть уравнение (3), следует восстановить поле скорости \mathbf{v} из поля завихренности ϖ . Благодаря предполагаемому условию несжимаемости

$$\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = 0,$$

можно ввести функцию тока ψ , связанную с компонентами скорости и завихренностью, как

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \varpi = -\nabla^2 \psi. \quad (4)$$

Чтобы найти функцию тока ψ , необходимо решить уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \psi = -\varpi.$$

Для системы без границ можно использовать интегральное представление

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int d^2x \varpi(\mathbf{x}) \ln |\mathbf{r} - \mathbf{x}|. \quad (5)$$

После нахождения ψ вычисляются компоненты скорости в соответствии с уравнением (4).

Внешняя случайная сила \mathbf{f} вкачивает энергию в течение. Средняя скорость генерации энергии на единицу массы записывается как $\langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \rangle$. Угловые скобки здесь и ниже обозначают усредненное значение. В лабораторных и численных экспериментах усреднение выполняется по времени. В нашей теоретической постановке усреднение выполняется по статистике силы накачки \mathbf{f} . Помимо производства энергии, вводится производство энтропии. Скорость генерации энтропии на единицу массы записывается как среднее значение $\langle \phi \varpi \rangle$, аналогично темпу генерации энергии. Обе величины, $\langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \rangle$ и $\langle \phi \varpi \rangle$, в нашей модели предполагаются однородными в пространстве и времени.

Мы предполагаем, что сила накачки \mathbf{f} имеет малое время корреляции и в среднем равна нулю, $\langle \mathbf{f} \rangle = 0$. Тогда статистические свойства внешней накачки полностью определяются ее парной корреляционной функцией

$$\langle f_\alpha(t, \mathbf{x}) f_\beta(0, \mathbf{y}) \rangle = 2\epsilon \delta(t) \delta_{\alpha\beta} \Xi(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (6)$$

отражающей предполагаемую однородность в пространстве и времени. Мы полагаем $\Xi(\mathbf{0}) = 1$, тогда темп генерации энергии равен $\langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \rangle = \epsilon$. Переходя к переменной $\phi = \text{curl } \mathbf{f}$, из уравнения (6) находим

$$\langle \phi(t, \mathbf{x}) \phi(0, \mathbf{y}) \rangle = -2\epsilon \delta(t) \nabla^2 \Xi(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (7)$$

где ∇ в лапласиане ∇^2 может быть производной либо по \mathbf{x} , либо по \mathbf{y} .

В общем случае корреляционные функции флуктуирующей завихренности неоднородны в пространстве из-за наличия среднего сдвигового потока, нарушающего однородность вдоль второй оси координат. Однако сдвиг вдоль второй оси координат может быть компенсирован соответствующим преобразованием Галилея, как это следует из уравнения (3). Соотношение (7) инвариантно относительно преобразования Галилея. Мы приходим к выводу, что в нашей модели одновременные корреляционные функции завихренности однородны в пространстве. То же самое верно и для корреляционных функций скорости. В частности, все одноточечные моменты не зависят от координат.

Умножая уравнение (1) на флуктуирующую скорость \mathbf{v} и усредняя результат, можно найти баланс энергии:

$$\epsilon = \Sigma \langle v_1 v_2 \rangle + \alpha \langle v^2 \rangle + \nu \langle (\partial_\alpha \mathbf{v})^2 \rangle. \quad (8)$$

Умножая уравнение (3) на ϖ и усредняя, находим баланс энтропии:

$$\langle \phi \varpi \rangle = \alpha \langle \varpi^2 \rangle + \nu \langle (\nabla \varpi)^2 \rangle. \quad (9)$$

При выводе соотношений (8), (9) мы опустили все полные производные по времени и координатам. Они равны нулю из-за стационарности и независимости координат всех одноточечных моментов.

Случайная сила \mathbf{f} характеризуется длиной корреляции k_f^{-1} , где k_f — характерный волновой вектор силы. Мы предполагаем, что справедливо следующее неравенство:

$$\Sigma \gg \nu k_f^2. \quad (10)$$

Неравенство (10) означает, что сдвигающий поток достаточно силен, чтобы существенно влиять на флуктуации на масштабе накачки. Далее мы рассмотрим случай, когда выполняется условие

$$\alpha \lesssim \nu k_f^2. \quad (11)$$

Как указано в работе [17], условие (11) должно быть удовлетворено для появления когерентных вихрей в двумерной турбулентности. Противоположный случай $\alpha \gg \nu k_f^2$ нуждается в специальном анализе. Комбинируя неравенство (10) с уравнением (11), мы приходим к выводу, что неравенство $\Sigma \gg \alpha$ также выполняется в нашей постановке задачи.

Наши расчеты, представленные ниже, проведены исходя из предположения $\Sigma > 0$. Однако

все полученные результаты могут быть легко распространены на отрицательную величину Σ . Скажем, простое симметричное рассуждение показывает, что третий момент $\langle \varpi^3 \rangle$ меняет свой знак при $\Sigma \rightarrow -\Sigma$. Что касается парной корреляционной функции $\langle \varpi(t, \mathbf{x})\varpi(0, \mathbf{y}) \rangle$, подстановка $\Sigma \rightarrow -\Sigma$ означает, что следует изменить знак второй компоненты, $x_2 \rightarrow -x_2$, $y_2 \rightarrow -y_2$, не трогая x_1, y_1 . Подобное рассуждение позволяет установить законы преобразования любой корреляционной функции при подстановке $\Sigma \rightarrow -\Sigma$.

3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

В линейном приближении уравнение (3) сводится к уравнению

$$(\partial_t + \hat{\mathcal{L}})\varpi = \phi, \quad \hat{\mathcal{L}} = \Sigma x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha - \nu \nabla^2. \quad (12)$$

Решения уравнения (12) без накачки ϕ были проанализированы в работе [19]. Чтобы найти корреляционные функции ϖ в линейном приближении, следует решить уравнение (12) для произвольного ϕ , а затем усреднить соответствующее произведение по статистике ϕ , определяемой соотношением (7).

Чтобы найти поправки к выражениям, полученным в линейном приближении, необходимо учитывать нелинейный член $\mathbf{v}\nabla\varpi$ в уравнении (3). Решая уравнение рекурсивно, получаем завихренность ϖ в виде ряда по силе накачки \mathbf{f} . Усредняя произведение завихренности по статистике силы накачки в соответствии с уравнением (6), можно получить ряд теории возмущений по степеням параметра ϵ . Такой ряд, возникающий в результате нелинейного гидродинамического взаимодействия, был впервые рассмотрен в работе [20]. Члены ряда могут быть представлены диаграммами Фейнмана, поэтому этот метод называется диаграммной техникой Уайлда. Диаграммный метод Уайлда может быть последовательно выведен из представления корреляционных функций в виде функциональных интегралов по наблюдаемым переменным и вспомогательным полям [21]. Интегрирование выполняется, как в квантовой теории поля, с весом $\exp(-\mathcal{I})$, где \mathcal{I} — эффективное действие. Подробное описание метода можно найти в обзоре [22].

В нашем случае функциональный интеграл записывается в терминах завихренности φ и соответствующего вспомогательного поля μ . Эффективное

действие \mathcal{I} может быть выведено из уравнения (3) и соотношения (7). Оно записывается как

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_{int}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 = & \int dt d^2x \mu (\partial_t + \hat{\mathcal{L}})\varpi + \\ & + \epsilon \int dt d^2x d^2r \nabla^2 \Xi(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \mu(t, \mathbf{x}) \mu(t, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathcal{I}_{int} = \int dt d^2x \mu \mathbf{v} \nabla \varpi. \quad (15)$$

Предполагается, что скорость \mathbf{v} в выражении (15) выражена через завихренность ϖ , см. (4), (5).

Введем парные корреляционные функции. Парная корреляционная функция завихренности записывается в виде следующего функционального интеграла:

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\varpi(s, \mathbf{y}) \rangle = \int D\varpi D\mu e^{-\mathcal{I}} \varpi(t, \mathbf{x}) \varpi(s, \mathbf{y}). \quad (16)$$

Мы также вводим следующее среднее:

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\mu(s, \mathbf{y}) \rangle = \int D\varpi D\mu e^{-\mathcal{I}} \varpi(t, \mathbf{x}) \mu(s, \mathbf{y}), \quad (17)$$

которое мы называем функцией Грина. Причина в том, что корреляционная функция (17) определяет реакцию системы на дополнительную внешнюю силу. Заметим, что среднее значение $\langle \mu \mu \rangle$ равно нулю.

Из-за однородности во времени парная корреляционная функция завихренности (16) и функция Грина (17) зависят исключительно от разницы во времени $t - s$. Из-за наличия сдвигового потока в нашей модели нарушается однородность пространства. Следовательно, парная корреляционная функция (16) и функция Грина (17) зависят от обеих пространственных координат. Точнее, однородность пространства нарушается в направлении второй оси. Следовательно, парная корреляционная функция (16) и функция Грина (17) зависят от обеих вторых координат, x_2 и y_2 , и от разности $x_1 - y_1$.

Любая корреляционная функция φ, μ может быть записана как функциональный интеграл аналогично парной корреляционной функции (16) и функции Грина (17). Можно построить теорию возмущений для корреляционной функции, разложив вес $\exp(-\mathcal{I})$ в функциональном интеграле по члену третьего порядка \mathcal{I}_{int} (15) и вычислив результирующие гауссовы функциональные интегралы. Интегралы выражаются в терминах «голых» корреляционных функций, определяемых квадратичным членом (14) в эффективном действии:

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\mu(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = \int \mathcal{D}\varpi \mathcal{D}\mu e^{-\mathcal{I}_2} \varpi(t, \mathbf{x})\mu(0, \mathbf{y}), \quad (18)$$

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\varpi(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = \int \mathcal{D}\varpi \mathcal{D}\mu e^{-\mathcal{I}_2} \varpi(t, \mathbf{x})\varpi(0, \mathbf{y}). \quad (19)$$

Среднее вида $\langle \varpi \dots \mu \dots \rangle_0$ определяется теоремой Вика [23], оно равно сумме произведений парных средних значений (18), (19) по всем возможным спариваниям.

Процедура позволяет построить ряд теории возмущений в духе квантовой теории поля, см., например, [24]. Чтобы использовать ряд теории возмущений, необходимо знать «голые» корреляционные функции (18), (19). Переходим к их вычислению.

3.1. Затравочные корреляционные функции

«Голые» корреляционные функции (18), (19) выражаются в терминах гауссовых интегралов и могут быть легко найдены в явном виде. Выражение (14) приводит к следующему уравнению для «голой» функции Грина:

$$(\partial_t + \hat{\mathcal{L}})\langle \varpi(t, \mathbf{x})\mu(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = \delta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (20)$$

Напомним, что любая функция Грина равна нулю в отрицательные моменты времени из-за причинно-следственной связи. Следовательно, функция $\langle \varpi(t, \mathbf{x})\mu(0, \mathbf{y}) \rangle$ равна нулю при $t < 0$. Выражение для «голой» парной корреляционной функции может быть получено с помощью уравнения (19):

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\varpi(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = -2\epsilon \int d\tau \int d^2r d^2z \nabla^2 \Xi(\mathbf{r} - \mathbf{z}) \times \langle \varpi(t, \mathbf{x})\mu(\tau, \mathbf{r}) \rangle_0 \langle \varpi(0, \mathbf{y})\mu(\tau, \mathbf{z}) \rangle_0. \quad (21)$$

Заметим, что в интеграле (21) $\tau < 0$ и $\tau < t$.

Перейдем к преобразованиям Фурье для парной корреляционной функции (21) и для функции Грина (20). Поскольку они зависят от обеих координат, преобразование включает в себя два интеграла. Мы используем следующие определения:

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\mu(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = \int \frac{d^2k d^2q}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}), \quad (22)$$

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\varpi(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = \int \frac{d^2k d^2q}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \mathcal{F}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}). \quad (23)$$

Парная корреляционная функция (23) инвариантна относительно преобразования $t \rightarrow -t$, $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}$ или $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{q}$.

Для преобразования Фурье $\mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q})$ (22) мы получаем из уравнения (20) следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Sigma k_1 \frac{\partial}{\partial k_2} + \alpha + \nu k_1^2 + \nu k_2^2 \right) \mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = (2\pi)^2 \delta(t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (24)$$

Поскольку уравнение (24) относится к первому порядку, оно может быть легко решено методом характеристик, что дает

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = (2\pi)^2 \theta(t) \delta(k_1 - q_1) \times \delta(k_2 - q_2 + \Sigma k_1 t) G(t, \mathbf{q}), \quad (25)$$

$$G(t, \mathbf{q}) = \exp\left(-\alpha t - \nu \mathbf{q}^2 t + \nu \Sigma q_2 q_1 t^2 - \frac{1}{3} \nu \Sigma^2 q_1^2 t^3\right), \quad (26)$$

где $\theta(t)$ — ступенчатая функция Хэвисайда: $\theta(t) = 1$, если $t > 0$, и $\theta(t) = 0$, если $t < 0$. Функция $\theta(t)$ в уравнении (26) отражает причинность: $\mathcal{G} = 0$, если $t < 0$.

Существует общее свойство функций Грина:

$$\mathcal{G}(t + \tau, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{p}) \mathcal{G}(\tau, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (27)$$

где $t > 0, \tau > 0$. Используя соотношение (27), находим

$$G(t + \tau, \mathbf{q}) = G(t, q_1, q_2 - \Sigma q_1 \tau) G(\tau, \mathbf{q}). \quad (28)$$

Конечно, можно напрямую проверить отношение (28), используя выражение (26). Отметим также соотношение

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = \theta(t) \exp[iq_1 x_1 + i(q_2 - \Sigma q_1 t)x_2] G(t, \mathbf{q}) \quad (29)$$

для частичного преобразования Фурье выражения (25).

Из уравнений (21), (22), (23) находим

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = 2\epsilon \int d\tau \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} p^2 \tilde{\Xi}(\mathbf{p}) \times \mathcal{G}(t + \tau, \mathbf{k}, \mathbf{p}) \mathcal{G}(\tau, \mathbf{q}, -\mathbf{p}). \quad (30)$$

Здесь

$$\tilde{\Xi}(\mathbf{k}) = \int d^2x \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \Xi(\mathbf{x}) \quad (31)$$

является пространственным преобразованием Фурье от $\Xi(\mathbf{r})$.

Подставляя (25) в (30), находим

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = 2\epsilon(2\pi)^2 \delta(k_1 + q_1) \delta(k_2 + q_2 + \Sigma k_1 t) \times \int d\tau \theta(\tau) \theta(t + \tau) \mathbf{p}^2 \tilde{\Xi}(\mathbf{p}) G(t + \tau, \mathbf{p}) G(\tau, \mathbf{p}), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= k_1 = -q_1, \\ p_2 &= k_2 + \Sigma(t + \tau)k_1 = -q_2 - \Sigma\tau q_1. \end{aligned} \quad (33)$$

Для одновременной корреляционной функции получаем

$$\mathcal{F}(0, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) F(\mathbf{q}), \quad (34)$$

$$F(\mathbf{k}) = 2\epsilon \int_0^\infty d\tau \mathbf{p}^2 \tilde{\Xi}(\mathbf{p}) G^2(\tau, \mathbf{p}), \quad (35)$$

где $p_1 = k_1, p_2 = k_2 + \Sigma\tau k_1$. Используя (28), находим из (32)

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = (2\pi)^2 \delta(k_1 + q_1) \delta(k_2 + q_2 + \Sigma t k_1) \times G(|t|, k_1, k_2 + \Sigma t k_1) F(\mathbf{q}). \quad (36)$$

Разумеется, при $t \rightarrow 0$ мы возвращаемся к выражению (34).

3.2. Некоторые «голые» величины

Рассмотрим «голый» вклад в недиагональную составляющую напряжения Рейнольдса:

$$\langle v_1(0, \mathbf{0}) v_2(0, \mathbf{0}) \rangle_0 = \int \frac{d^2 k d^2 q k_1 q_2}{(2\pi)^4 k^2 q^2} \mathcal{F}(0, \mathbf{k}, \mathbf{q}),$$

где множитель при \mathcal{F} в подынтегральном выражении получен из (4). Подставляя сюда выражения (34), (35), находим

$$\begin{aligned} \langle v_1(0, \mathbf{0}) v_2(0, \mathbf{0}) \rangle_0 &= \\ &= 2\epsilon \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \mathbf{p}^2 \tilde{\Xi}(\mathbf{p}) [G(\tau, \mathbf{p})]^2 \times \\ &\quad \times \frac{p_1(-p_2 + \Sigma p_1 \tau)}{[p_1^2 + (-p_2 + \Sigma p_1 \tau)^2]}, \end{aligned} \quad (37)$$

где $G(\tau, \mathbf{p})$ определяется (26). Здесь $p_1 \sim p_2 \sim k_f$ и характерное значение τ определяется знаменателем, т. е. $\tau \sim \Sigma^{-1}$, а функция $G(\tau, \mathbf{p})$ может быть заменена на единицу. Беря затем интеграл по τ ,

$$\int_0^\infty d\tau \frac{q(-p + q\Sigma\tau)}{[q^2 + (p - q\Sigma\tau)^2]^2} = \frac{1}{2\Sigma(q^2 + p^2)},$$

находим [12, 13]

$$\langle v_1(0, \mathbf{0}) v_2(0, \mathbf{0}) \rangle_0 = \frac{\epsilon}{\Sigma} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \tilde{\Xi}(\mathbf{p}) = \frac{\epsilon}{\Sigma}, \quad (38)$$

так как по определению $\Xi(0) = 1$.

Выражения (34), (35) позволяют оценить «голое» значение второго момента завихренности:

$$\langle \varpi^2 \rangle_0 = 2\epsilon \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} p^2 \tilde{\Xi}(\mathbf{p}) G^2(\tau, \mathbf{p}).$$

Значения компонент волнового вектора \mathbf{p} могут быть оценены как k_f . Поэтому в основном приближении мы можем сохранить только последний член в экспоненте в выражении (26):

$$G(\tau, \mathbf{p}) \rightarrow \exp\left(-\frac{1}{3}\nu\Sigma^2 p_1^2 \tau^3\right). \quad (39)$$

Подставляя затем $p_1 \sim p_2 \sim k_f$, получаем оценку

$$\langle \varpi^2 \rangle_0 \sim \epsilon k_f^2 \tau_*, \quad \tau_* = \left(\Sigma^2 \nu k_f^2\right)^{-1/3}. \quad (40)$$

Заметим, что

$$\Sigma \gg \tau_*^{-1} \gg \nu k_f^2.$$

Неравенства объясняются условием (10). Заметим также, что $\alpha\tau_* \ll 1$. Неравенство объясняется теми же условиями (10) и (11).

Можно найти коэффициент в законе (40) для конкретной функции $\tilde{\Xi}(\mathbf{p})$. Скажем, можно выбрать

$$\tilde{\Xi}(\mathbf{p}) = \frac{2\pi}{k_f^2} \exp\left(-\frac{p^2}{2k_f^2}\right), \quad (41)$$

что соответствует

$$\Xi(\mathbf{x}) = \exp(-k_f^2 x^2 / 2).$$

Тогда находим [25]

$$\langle \varpi^2 \rangle_0 = \frac{2^{10/3}}{3^{2/3} \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \epsilon k_f^2 \tau_*. \quad (42)$$

Результат расчета подтверждает общую оценку (40).

Аналогично может быть оценена «голая» парная корреляционная функция [25]. Одновременная корреляционная функция (34) определяется функцией $F(\mathbf{k})$, которая дается интегралом (35). Если

$$k_f \gtrsim k_1 \gg \nu k_f^3 / \Sigma, \quad k_f \gtrsim k_2,$$

то характерное время в интеграле (35) определяется k_1 , см. (39), и мы получаем

$$F \sim \epsilon \tau_* k^2 k_f^{-4/3} k_1^{-2/3}. \quad (43)$$

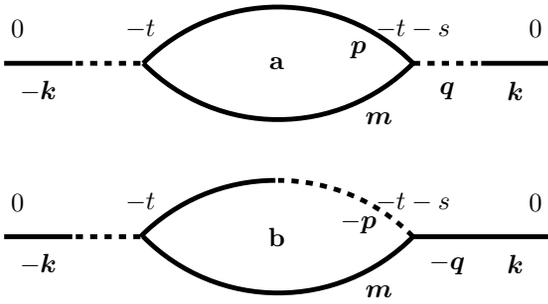


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана, представляющие первые поправки к парной одновременной корреляционной функции

Итак, для $k_1, k_2 \sim k_f$ мы получаем $F \sim \epsilon \tau_*$, а для $k_1 \sim \nu k_f^3 / \Sigma, k_2 \sim k_f$ мы получаем $F \sim \epsilon / \nu k_f^2$. Выражение (43) задает универсальное степенное поведение между этими предельными случаями.

Можно получить удобное выражение для $F(\mathbf{k})$, используя конкретную форму (41) корреляций накачки. Если

$$k_f \gtrsim k_1 \gg \nu k_f^3 / \Sigma,$$

то

$$F(\mathbf{k}) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \frac{4\pi\epsilon\tau_*k^2}{k_f^{4/3}k_1^{2/3}} \exp\left(-\frac{k^2}{2k_f^2}\right) \quad (44)$$

в соответствии с законом (43). Преобразование Фурье выражения (44) позволяет восстановить свойства одновременной парной корреляционной функции в реальном пространстве, рассмотренные в работе [26].

3.3. Поправки за счет взаимодействия

Как мы объяснили, поправки за счет взаимодействия к «голым» значениям корреляционных функций должны быть рассчитаны в рамках ряда теории возмущений. Он строится путем разложения $\exp(\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_{int})$ в ряд по \mathcal{I}_{int} (15) в соответствующем функциональном интеграле. Каждый член разложения можно найти аналитически, используя теорему Вика [22]. Это многократный интеграл по временам и волновым векторам от некоторого выражения, определяемого «голыми» парными корреляционными функциями, функциями Грина и коэффициентами, соответствующими преобразованию $\varpi \rightarrow \mathbf{v}$. Заметим, что при увеличении порядка теории возмущений на единицу необходимо принять во внимание два дополнительных члена разложения по \mathcal{I}_{int} .

Члены ряда теории возмущений могут быть представлены диаграммами Фейнмана. Диаграммы,

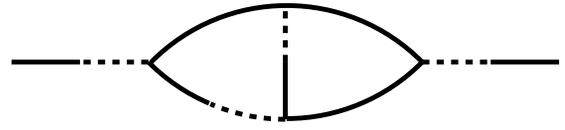


Рис. 2. Двухпетлевая диаграмма, представляющая поправку второго порядка к парной корреляционной функции.

определяющие поправку первого порядка к парной корреляционной функции завихренности, изображены на рис. 1. Поправки более высокого порядка соответствуют более сложным диаграммам. Пример более сложной диаграммы, определяющей поправку второго порядка к парной корреляционной функции завихренности, изображен на рис. 2. Порядок рядов возмущений соответствует количеству петель на диаграммах. Скажем, поправка первого порядка к парной корреляционной функции завихренности определяется одноконтурными диаграммами, см. рис. 1, а поправка второго порядка к парной корреляционной функции завихренности — двухпетлевыми диаграммами, см. рис. 2.

Считается, что все линии на диаграммах состоят из двух сегментов, сплошные сегменты соответствуют полю ϖ , тогда как штриховые сегменты — полю μ . Таким образом, комбинированная сплошная штриховая линия обозначает функцию Грина $\mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q})$, а сплошная линия обозначает парную корреляционную функцию $\mathcal{F}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q})$. Два сплошных сегмента и один штриховой сегмент прикреплены к каждой вершине в соответствии со структурой \mathcal{I}_{int} (15). Каждой вершине соответствует фактор

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{k^2} \right) (q_2 k_1 - q_1 k_2), \quad (45)$$

где \mathbf{k}, \mathbf{q} — волновые векторы сплошных сегментов, прикрепленных к вершине.

Чтобы построить аналитическое выражение, соответствующее данной диаграмме, следует зафиксировать соответствующий комбинаторный множитель, взять произведение функций Грина, парных корреляционных функций и вершинного множителя и проинтегрировать результат по «внутренним» волновым векторам и временам. Интегрирование должно выполняться при условии сохранения волнового вектора в каждой вершине: сумма волновых векторов трех сегментов, прикрепленных к вершине, должна быть равна нулю. Интересно, что поправки к \mathcal{G}, \mathcal{F} воспроизводят структуру «голых» корреляционных функций (25), (36) с теми же δ -функциями. Таким образом, из диаграмм можно извлечь поправки к функциям $G(t, \mathbf{k}), F(\mathbf{k})$. Это

свойство является следствием предполагаемого малого времени корреляции накачки. Именно поэтому мы выбрали эту модель, поскольку это свойство существенно упрощает конкретные расчеты.

Ряд теории возмущений представлен набором диаграмм с различным количеством петель. Увеличение числа петель на единицу означает добавление к диаграмме одной F -линии, одной G -линии и двух вершин. Обратите внимание, что F содержит ϵ в качестве множителя, см. уравнение (35), тогда как G и коэффициент (45), соответствующие вершине, не содержат этого фактора. Следовательно, можно сказать, что ряд возмущений — это ряд по ϵ . Безразмерным параметром, управляющим рядом теории возмущений, является

$$\beta = \frac{\epsilon}{\Sigma^2 \nu}. \quad (46)$$

Для различных объектов параметр (46) может быть скорректирован с помощью коэффициентов, зависящих от безразмерных величин $\nu k_f^2 / \Sigma$, k_1 / k_f , k_2 / k_f . В любом случае параметр (46) должен быть небольшим для применимости теории возмущений.

Заметим, что нулевой вклад в третий момент завихренности $\langle \varpi^3 \rangle$ равен нулю. Первый ненулевой вклад в $\langle \varpi^3 \rangle$ появляется в первом порядке в теории возмущений. Подчеркнем, что момент определяется «древесной» диаграммой, где петли отсутствуют. Таким образом, объект нуждается в специальном анализе, проведенном в работе [25]. В результате получается

$$\langle \varpi^3 \rangle \sim \frac{\epsilon^2 k_f^2}{\Sigma^2 \nu} \quad (47)$$

с точностью до логарифмического фактора. Величина (47) удовлетворяет соотношению

$$\langle \varpi^3 \rangle^2 \sim \beta (\langle \varpi^2 \rangle_0)^3, \quad (48)$$

см. (40). Множитель β в уравнении (48) является проявлением того факта, что основной вклад в третий момент завихренности появляется в первом порядке ряда теории возмущений.

4. ПОПРАВКИ К ПАРНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ЗАВИХРЕННОСТИ

Мы переходим к вычислению поправок к парной корреляционной функции. Расчет раскрывает особенности ряда возмущений и демонстрирует некоторые универсальные характеристики, которые могут

быть использованы для оценки более сложных объектов. Мы концентрируемся на анализе одновременной корреляционной функции, зависящей исключительно от разности координат. Поправка записывается в виде

$$\delta \langle \varpi(\mathbf{x}) \varpi(\mathbf{0}) \rangle = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \delta F(\mathbf{k}), \quad (49)$$

где $\delta F(\mathbf{k})$ — поправка к функции $F(\mathbf{k})$, введенная в (36).

В первом порядке ряда возмущений поправка $\delta F(\mathbf{k})$ определяется диаграммами, изображенными на рис. 1. Подчеркнем, что мы имеем дело с неодновременными корреляционными функциями внутри диаграмм. Поэтому следует использовать общие функции $\mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q})$, $\mathcal{F}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q})$, см. (25), (26), (36). Аналитические выражения для вкладов в $\delta F(\mathbf{k})$, соответствующие диаграммам a и b на рис. 1, имеют вид

$$F_a(\mathbf{k}) = 2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \int \frac{d^2 m}{(2\pi)^2} \times \\ \times G(t, -k_1, -k_2 - \Sigma t k_1) G(s + t, \mathbf{q}) \times \\ \times V(\mathbf{m}, \mathbf{p}) G(s, \mathbf{p}) G(s, \mathbf{m}) F(\mathbf{m}) F(\mathbf{p}) \times \\ \times \left(\frac{1}{\mathbf{m}^2} - \frac{1}{\mathbf{p}^2} \right) (m_2 p_1 - m_1 p_2) \quad (50)$$

и

$$F_b(\mathbf{k}) = -4 \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \int \frac{d^2 m}{(2\pi)^2} \times \\ \times G(t, -k_1, -k_2 - \Sigma t k_1) G(s + t, \mathbf{q}) \times \\ \times V(\mathbf{m}, \mathbf{p}) G(s, \mathbf{p}) G(s, \mathbf{m}) F(\mathbf{m}) F(\mathbf{q}) \times \\ \times \left(\frac{1}{\mathbf{m}^2} - \frac{1}{\mathbf{q}^2} \right) (m_2 q_1 - m_1 q_2), \quad (51)$$

где

$$q_1 = k_1, \quad q_2 = k_2 + \Sigma(t + s)k_1,$$

$$p_1 = k_1 - m_1, \quad p_2 = k_2 - m_2 + \Sigma(t + s)k_1,$$

а V является фактором (45), соответствующим левой вершине:

$$V(\mathbf{m}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m_1^2 + (m_2 - \Sigma s m_1)^2} - \frac{1}{p_1^2 + (p_2 - \Sigma s p_1)^2} \right\} (m_2 p_1 - m_1 p_2). \quad (52)$$

Выражения записаны в соответствии с общими правилами чтения диаграмм.

Подынтегральное выражение в (50) инвариантно относительно перестановки $\mathbf{m} \leftrightarrow \mathbf{p}$. Поэтому можно подставить

$$\frac{1}{m^2} - \frac{1}{p^2} \rightarrow \frac{2}{m^2}. \quad (53)$$

После этой подстановки находим

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{k}) = F_a + F_b = & 4 \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \int \frac{d^2 m}{(2\pi)^2} \times \\ & \times G(t, -k_1, -k_2 - \Sigma tk_1) G(s + t, \mathbf{q}) \times \\ & \times V(\mathbf{m}, \mathbf{p}) G(s, \mathbf{p}) G(s, \mathbf{m}) F(\mathbf{m}) \times \\ & \times \left[\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} + \frac{F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{q})}{\mathbf{m}^2} \right] (m_2 q_1 - m_1 q_2), \quad (54) \end{aligned}$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{m}$.

4.1. Промежуточная область волновых векторов

Рассмотрим случай

$$\frac{\nu k_f^2}{\Sigma} \ll k_1 \ll k_f, \quad k_2 \sim k_f, \quad (55)$$

соответствующий универсальному поведению (43). В интеграле (54) есть разные области интегрирования по m_1 , которые необходимо изучить, чтобы извлечь основной вклад в поправку δF .

Рассмотрим область интегрирования

$$m_1 \sim m_2 \sim k_f.$$

Тогда

$$m_2 q_1 - m_1 q_2 \approx m_1 q_2, \quad p_1 \approx -m_1$$

и

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{k}) = & 2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \int \frac{d^2 m}{(2\pi)^2} \times \\ & \times G(t, -k_1, -k_2 - \Sigma tk_1) G(s + t, \mathbf{q}) \times \\ & \times m_1^2 q_2^2 \left\{ \frac{1}{m_1^2 + (m_2 - \Sigma sm_1)^2} - \frac{1}{p_1^2 + (p_2 - \Sigma sp_1)^2} \right\} \times \\ & \times G(s, \mathbf{p}) G(s, \mathbf{m}) F(\mathbf{m}) \left[\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} + \frac{F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{q})}{\mathbf{m}^2} \right]. \quad (56) \end{aligned}$$

Интегрирование по s здесь определяется знаменателями, $s \sim \Sigma^{-1}$. Поэтому зависимостью от s можно

пренебречь везде, за исключением этих знаменателей: в функциях Грина $s \sim \Sigma^{-1}$ дает пренебрежимые вклады, а в q_2, p_2 время s входит с малым фактором k_1 . Поскольку s входит в знаменатели в виде комбинации $m_1 s$, а все остальные величины являются функциями m_1^2 , мы можем интегрировать по m_1 от 0 до ∞ и по s от $-\infty$ до ∞ . Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{1}{m_1^2 + (m_2 - \Sigma sm_1)^2} = \frac{\pi}{\Sigma m_1^2}.$$

Итак, интегралы по s от разности членов, зависящих от \mathbf{m} и \mathbf{p} , сокращают друг друга. Вследствие этого данная область интегрирования $m_1 \sim m_2 \sim k_f$ не вносит основного вклада в поправку δF .

Следовательно, основной вклад в интеграл (54) обязан области $m_1 \sim k_1$ и $m_2 \sim k_f$. Тогда характерные времена определяются $F(\mathbf{p})$, $F(\mathbf{q})$, т. е.

$$s, t \sim \frac{k_f}{\Sigma k_1}, \quad \Sigma^{-1} \ll s, t \ll (\nu k_f^2)^{-1}. \quad (57)$$

Оценки (57) объясняют условие $m_1 \sim k_1$, так как m_1 определяется знаменателями $V(\mathbf{m}, \mathbf{p})$ (52). Оценки (57) означают, что все функции Грина в (54) могут быть заменены на единицы. Тогда мы находим

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{k}) = & 4 \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \int \frac{d^2 m}{(2\pi)^2} V(\mathbf{m}, \mathbf{p}) F(\mathbf{m}) \times \\ & \times \left[\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} + \frac{F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{q})}{\mathbf{m}^2} \right] (m_2 q_1 - m_1 q_2), \quad (58) \end{aligned}$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{m}$.

Неравенства $m_1 \ll m_2$ и $p_1 \ll p_2$ позволяют совершить подстановку

$$\begin{aligned} V(\mathbf{m}, \mathbf{p}) \rightarrow & \frac{\pi}{2} (m_2 p_1 - m_1 p_2) \times \\ & \times \left[\frac{1}{|m_1|} \delta(m_2 - \Sigma sm_1) - \frac{1}{|p_1|} \delta(p_2 - \Sigma sp_1) \right], \quad (59) \end{aligned}$$

как следует из (52). Тогда из соотношений (52), (58) находим

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{k}) = & \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \int \frac{d^2 m}{2\pi} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{|m_1|} \delta(\Sigma sm_1 - m_2) - \frac{1}{|p_1|} \delta(\Sigma sp_1 - p_2) \right\} \times \\ & \times F(\mathbf{m}) F(\mathbf{q}) \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{m^2} \right) (m_2 q_1 - m_1 q_2)^2. \quad (60) \end{aligned}$$

Выражение (60) переписывается следующим образом:

$$\delta F(\mathbf{k}) = \iint_0^\infty dt ds \int_{-\infty}^\infty \frac{dm_1}{2\pi} |m_1| (k_2 + \Sigma t k_1)^2 \times \\ \times F(\mathbf{q}) \left[F(\mathbf{m}) \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{m^2} \right) - F(\mathbf{p}) \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2} \right) \right], \quad (61)$$

где

$$m_2 = \Sigma s m_1, \quad q_1 = k_1, \quad q_2 = k_2 + \Sigma(t + s)k_1, \\ p_1 = k_1 - m_1, \quad p_2 = k_2 - \Sigma s m_1 + \Sigma(t + s)k_1.$$

Знаки k_1, k_2 здесь произвольны.

Проверим, что интеграл (61) сходится при $m_1 \gg k_1$. При этом условии в главном приближении

$$q_2 = k_2 + \Sigma t k_1, \quad p_1 = -m_1, \quad p_2 = q_2 - m_2.$$

Переходя от интегрирования по s к интегрированию по $m_2 = \Sigma s m_1$, находим

$$\delta F(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \iint_0^\infty dt dm_1 \int_{-\infty}^\infty dm_2 q_2^2 F(\mathbf{q}) \times \\ \times \left[F(\mathbf{m}) \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{m^2} \right) - F(\mathbf{p}) \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2} \right) \right]. \quad (62)$$

Сдвигая интегрирование по m_2 во втором члене в квадратных скобках, мы приходим к нулевому вкладу в интеграл. Следующие члены разложения подынтегрального выражения в (61) по параметру k_1/m_1 дают сходящиеся интегралы.

Выражение (61) позволяет оценить поправку δF в области (55). Комбинируя оценки $m_1 \sim k_1$, (57) с соотношением (43), находим

$$\delta F(\mathbf{k}) \sim \beta \left(\frac{\nu k_f^3}{\Sigma k_1} \right)^{2/3} F(\mathbf{k}), \quad (63)$$

где β определена в (46). Множитель $\nu k_f^3/\Sigma k_1$ мал в данной области (55). Он становится порядка единицы при $k_1 \sim \nu k_f^3/\Sigma$, где относительная поправка к F (63) оценивается как β (46).

Найдем поправку δF , используя конкретную функцию (44). Поскольку поправка $\delta F(\mathbf{k})$ симметрична относительно $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, без потери общности мы предполагаем, что $k_1 > 0$, тогда как k_2 имеет произвольный знак. Мы подставляем выражение (44) в уравнение (61) и переходим к безразмерным переменным $\kappa, \tau, \sigma, \mu$ в соответствии с

$$m_1 = k_1 \mu, \quad t = \frac{k_f}{\Sigma k_1} \tau, \quad s = \frac{k_f}{\Sigma k_1} \sigma, \quad k_2 = k_f \kappa, \\ p_1 = k_1(1 - \mu), \quad q_2 = k_f(\kappa + \tau + \sigma), \\ m_2 = k_f \sigma \mu, \quad p_2 = k_f(\kappa - \sigma \mu + \tau + \sigma). \quad (64)$$

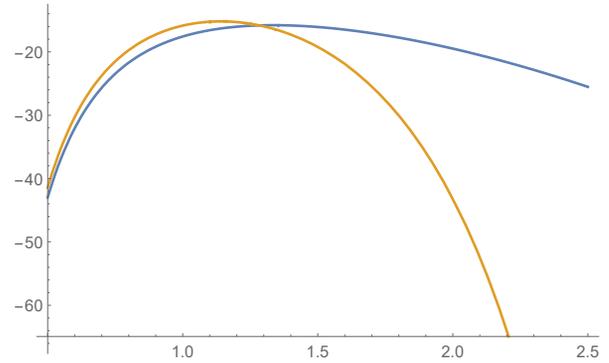


Рис. 3. (В цвете онлайн) Интеграл (66) как функция $|k_2|/k_f$ при положительных k_2/k_1 (синяя линия) и отрицательных k_2/k_1 (желтая линия).

Тогда мы приходим к

$$\frac{\delta F(\mathbf{k})}{F(\mathbf{k})} = 2\beta \left(\frac{\nu k_f^3}{\Sigma k_1} \right)^{2/3} A \left(\frac{k_2}{k_f} \right), \quad (65)$$

где

$$A(\kappa) = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \Gamma \left(\frac{4}{3} \right) \frac{e^{\kappa^2/2}}{\kappa^2} \iiint_0^\infty d\tau d\sigma d\mu \times \\ \times \mu(\kappa + \tau)^2 \exp \left[-\frac{(\kappa + \tau + \sigma)^2}{2} \right] \times \\ \times \left\{ 2 \frac{\mu^2 \sigma^2 - (\kappa + \tau + \sigma)^2}{\mu^{2/3}} \exp \left[-\frac{\mu^2 \sigma^2}{2} \right] - \right. \\ - [(\kappa - \sigma \mu + \tau + \sigma)^2 - (\kappa + \tau + \sigma)^2] \times \\ \times \frac{1}{|1 - \mu|^{2/3}} \exp \left[-\frac{(\kappa - \sigma \mu + \tau + \sigma)^2}{2} \right] - \\ - [(\kappa + \sigma \mu + \tau + \sigma)^2 - (\kappa + \tau + \sigma)^2] \times \\ \left. \times \frac{1}{(1 + \mu)^{2/3}} \exp \left[-\frac{(\kappa + \sigma \mu + \tau + \sigma)^2}{2} \right] \right\}. \quad (66)$$

Интеграл (66), найденный численно, приведен на рис. 3.

Заметим, что $\delta F \propto k_1^{-4/3}$ в соответствии с соотношениями (43), (65). Следовательно, интеграл по k_1 в выражении для поправки ко второму моменту завихренности,

$$\delta \langle \varpi^2 \rangle = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \delta F, \quad (67)$$

«садится» на нижний предел области (55), $k_1 \sim \nu k_f^3/\Sigma$. Поэтому при вычислении $\delta \langle \varpi^2 \rangle$ нельзя использовать оценку (43) или выражение (44) и следует вернуться к общему выражению для парной корреляционной функции.

4.2. Поправки к моментам

Интегрируя выражение (54) по \mathbf{k} и переходя к интегрированию по \mathbf{p} , можно найти

$$\begin{aligned} \delta\langle\varpi^2\rangle &= 4 \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \int \frac{d^2m d^2p}{(2\pi)^4} \times \\ &\times G(t, -q_1, -q_2 + \Sigma s q_1) G(s+t, \mathbf{q}) \times \\ &\times V(\mathbf{m}, \mathbf{p}) G(s, \mathbf{p}) G(s, \mathbf{m}) F(\mathbf{m}) \times \\ &\times \left[\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} + \frac{F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{q})}{\mathbf{m}^2} \right] (m_2 p_1 - m_1 p_2), \quad (68) \end{aligned}$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{m}$. Что касается парной корреляционной функции в области (55), то в интеграле (68) $m_1 \ll m_2$ и $p_1 \ll p_2$. Следовательно, можно использовать замену (59).

Подставляя (59) в (68), находим

$$\begin{aligned} \delta\langle\varpi^2\rangle &= 2\pi \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \int \frac{d^2m d^2p}{(2\pi)^4} \times \\ &\times G(t, -q_1, -q_2 + \Sigma s q_1) G(s+t, \mathbf{q}) G(s, \mathbf{p}) G(s, \mathbf{m}) \times \\ &\times F(\mathbf{m}) \left[\frac{1}{|m_1|} \delta(m_2 - \Sigma s m_1) - \frac{1}{|p_1|} \delta(p_2 - \Sigma s p_1) \right] \times \\ &\times \left[\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} + \frac{F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{q})}{\mathbf{m}^2} \right] (m_2 p_1 - m_1 p_2)^2. \quad (69) \end{aligned}$$

Приведем оценки для переменных в интеграле (69):

$$\begin{aligned} s \sim t &\sim \frac{1}{\nu k_f^2}, \quad p_2 \sim m_2 \sim k_f, \\ p_1 \sim k_1 &\sim \frac{\nu k_f^3}{\Sigma}, \quad F \sim \frac{\epsilon}{\nu k_f^2}, \end{aligned}$$

где мы предположили $\alpha \ll \nu k_f^2$. Тогда

$$\delta\langle\varpi^2\rangle \sim \frac{\epsilon^2 k_f^2}{\nu \Sigma^3} \sim \beta \frac{1}{\Sigma \tau_*} \langle\varpi^2\rangle_0, \quad (70)$$

где β определена в (46).

Аналогично можно найти оценку для недиагональной составляющей тензора напряжений Рейнольдса:

$$\delta\langle v_1 v_2 \rangle \sim \frac{\epsilon^2 k_f^2}{\Sigma^4} \sim \beta \frac{\nu k_f^2}{\Sigma} \langle v_1 v_2 \rangle_0, \quad (71)$$

где $\langle v_1 v_2 \rangle_0$ дается (38). В оценке (71) наблюдается дополнительная малость $\nu k_f^2 / \Sigma$. Этот факт находится в соответствии с балансом энергии (8). Действительно, из (8) следует, что при $\alpha \ll \nu k_f^2$ поправка $\delta\langle v_1 v_2 \rangle$ к ϵ / Σ должна содержать дополнительный множитель ν / Σ по сравнению с поправкой $\delta\langle\varpi^2\rangle$. Тогда получаем (71) из (70).

4.3. Поправки высшего порядка к корреляционным функциям

Каждая диаграмма Фейнмана имеет определенное количество петель. Например, диаграммы, изображенные на рис. 1, характеризуются одной петлей, тогда как диаграмма, изображенная на рис. 2, содержит две петли. Количество петель соответствует порядку ряда теории возмущений. Мы можем оценить параметр, управляющий добавлением петли для парной корреляционной функции в области (55). Переходя от диаграммы с n петлями к диаграмме с $n+1$ петлями, получаем две дополнительные вершины, одну дополнительную \mathcal{G} -линию и одну дополнительную \mathcal{F} -линию. Мы получаем также два дополнительных интегрирования по времени (связанных с двумя дополнительными вершинами) и дополнительное интегрирование по волновому вектору.

Можно выбрать в качестве переменной интегрирования волновой вектор \mathbf{m} , принадлежащий одной из вершин. Затем волновые векторы, принадлежащие другой дополнительной вершине, выражаются через времена и волновые векторы \mathbf{m} . Тогда соответствующий коэффициент (45) выглядит так, как в уравнении (52), и может быть заменен, как в уравнении (59). Та же логика, что и для первой поправки, приводит к выводу, что коэффициент, производимый дополнительной петлей, равен

$$\beta \left(\frac{\nu k_f^3}{\Sigma k_1} \right)^{2/3}. \quad (72)$$

Таким образом, именно (72) — это малый параметр, оправдывающий теорию возмущений.

Если мы рассматриваем поправки к моментам, таким как $\delta\langle\varpi^2\rangle$ или $\delta\langle v_1 v_2 \rangle$, то интегралы, определяющие поправки, набираются в области характерных значений первых компонент волновых векторов $\sim \nu k_f^3 / \Sigma$, соответствующих нижней границе области (55). Там малый параметр ряда возмущений равен β . Следовательно, можно оценить поправки n -го порядка ко второму моменту следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_n \langle\varpi^2\rangle &\sim \frac{\epsilon k_f^2}{\Sigma} \beta^n, \\ \delta_n \langle v_1 v_2 \rangle &\sim \frac{\epsilon \nu k_f^2}{\Sigma^2} \beta^n. \end{aligned} \quad (73)$$

Однако следует быть осторожным. «Голые» вклады в моменты (38), (40) не подчиняются логике, установленной для (73). Следовательно, оценки (73) не охватывают при $n=0$ выражения (38), (40), они оказываются намного большими, чем оценки (73) при $n=0$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали статистические свойства случайного потока, возбуждаемого относительно слабой случайной силой на фоне сильного статического сдвигового потока. Мы установили, что малым параметром, управляющим рядом возмущений в рамках нашей модели, является β (46). Заметим, что этот параметр не зависит от времени корреляции силы накачки. Поправки ко второму моменту определяются волновыми векторами, где вторая составляющая имеет порядок волнового вектора накачки, $k_2 \sim k_f$, тогда как первая составляющая намного меньше, $k_1 \sim \nu k_f^3 / \Sigma$. Таким образом, основной вклад в поправки вносят неизотропные сгустки завихренности, сильно вытянутые вдоль направления скорости сдвига.

Стоит отметить, что вклад взаимодействия с флуктуациями на длине накачки, где обе составляющие волновых векторов оцениваются как k_f , содержит сокращения, приводя к эффективной локальности взаимодействия в \mathbf{k} -пространстве. Такая локальность оправдывает универсальность поведения корреляционных функций в области (55). Аналогичные сокращения имеют место при пертурбативном подходе к трехмерной турбулентности [27, 28].

Наше исследование было мотивировано изучением структуры когерентных вихрей, генерируемых в результате обратного каскада в двумерных турбулентных потоках в конечных ячейках. Можно оценить параметр β для плоского профиля средней полярной скорости $U = \sqrt{3\epsilon/\alpha}$ [11], где ϵ — энергия, вкачиваемая в жидкость на единицу массы, а α — коэффициент трения о дно. Тогда локальная средняя скорость сдвига

$$\Sigma \sim \epsilon^{1/2} \alpha^{-1/2} r^{-1},$$

где r — расстояние от центра вихря. Таким образом, параметр β (46) равен

$$\beta \sim \alpha r^2 \nu^{-1}.$$

Поскольку аппроксимация локального среднего сдвигового потока верна при $k_f r \gg 1$ (где k_f — характерный волновой вектор накачки), параметр β может быть мал в некоторой области расстояний, если $\alpha \ll \nu k_f^2$. Это условие может быть легко достигнуто при численном моделировании, но вряд ли оно достигается в лабораторных экспериментах с тонкими пленками жидкости. Заметим, однако, что наша модель сама по себе может быть реализована

экспериментально, если помимо мелкомасштабной случайной накачки в жидкости создается некоторое сильное сдвиговое течение. Кроме того, в трехмерных системах с сильным вращением турбулентность эффективно двумеризуется [29]. В результате могут возникнуть столбовые вихри, практически однородные вдоль оси вращения [30]. Для таких систем эффективный коэффициент трения может быть существенно меньше вязкого диссипативного параметра.

Возвращаясь к когерентным вихрям, мы приходим к выводу, что интересно проанализировать случай, когда параметр β не мал. В данном случае мы сталкиваемся с ситуацией сильного взаимодействия, типичной для турбулентных систем. Этот режим нуждается в специальном исследовании, которое выходит за рамки данной работы.

Заметим, однако, что энергетический баланс (8) является точным соотношением, справедливым и для режима сильного взаимодействия. Таким образом, мы ожидаем, что недиагональная составляющая тензора напряжений Рейнольдса равна ϵ/Σ (при достаточно большом темпе сдвига Σ) даже в режиме сильного взаимодействия. Следовательно, плоский профиль скорости $U = \sqrt{3\epsilon/\alpha}$ является универсальным и не зависит от характера взаимодействия.

В наших расчетах мы использовали конкретную модель, в которой сила накачки имеет малое время корреляции. Это позволяет облегчить расчеты по сравнению с общим случаем накачки с конечным временем корреляции. Однако мы надеемся, что общие следствия, полученные в рамках нашей конкретной модели, универсальны и справедливы для общего случая. Скажем, энергетический баланс (8) не зависит от модели. Следовательно, выводы, касающиеся связи между поправками ко второму моменту завихренности и к недиагональной составляющей тензора напряжений Рейнольдса (см. разд. 4.2), также универсальны.

Финансирование. И. В. Колоколов благодарит за поддержку Министерство науки и высшего образования Российской Федерации. Работа В. В. Лебедева выполнена в лаборатории «Современная гидродинамика», созданной в рамках гранта 075-15-2022-1099 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в Институте теоретической физики им. Ландау РАН и поддержана грантом 23-72-30006 Российского научного фонда.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Boffetta and R. E. Ecke, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **44**, 427 (2012).
2. R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10**, 1417 (1967).
3. C. E. Leith, *Phys. Fluids* **11**, 671 (1968).
4. G. K. Batchelor, *Phys. Fluids* **12**, 233 (1969).
5. R. H. Kraichnan and D. Montgomery, *Rep. Prog. Phys.* **43**, 547 (1980).
6. J. Sommeria, *Experimental Study of the Two-Dimensional Inverse Energy Cascade in a Square Box*, *J. Fluid Mech.* **170**, 139 (1986).
7. D. Molenaar, H. J. H. Clercx, and G. J. F. van Heijst, *Physica D* **196**, 329 (2004).
8. H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, *Phys. Fluids* **21**, 125101 (2009).
9. A. V. Orlov, M. Yu. Brazhnikov, and A. A. Levchenko, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 166 (2018) [*JETP Lett.* **107**, 157 (2018)].
10. M. Chertkov, C. Connaughton, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Dynamics of Energy Condensation in Two-Dimensional Turbulence*, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 084501 (2007).
11. J. Laurie, G. Boffetta, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Universal Profile of the Vortex Condensate in Two-Dimensional Turbulence*, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 254503 (2014).
12. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *Profile of Coherent Vortices in Two-Dimensional Turbulence*, *Письма в ЖЭТФ* **101**, 181 (2015) [*JETP Lett.* **101**, 164 (2015)].
13. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *Structure of Coherent Vortices Generated by the Inverse Cascade of Two-Dimensional Turbulence in a Finite Box*, *Phys. Rev. E* **93**, 033104 (2016).
14. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *Velocity Statistics Inside Coherent Vortices Generated by the Inverse Cascade of 2-D Turbulence*, *J. Fluid Mech.* **809**, R2 (2016).
15. A. Frishman, J. Laurie, and G. Falkovich, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 032602 (2017).
16. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, *Крупномасштабное течение в двумерной турбулентности при статической накачке*, *Письма в ЖЭТФ* **106**, 633 (2017) [I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *Large-scale Flow in Two-Dimensional Turbulence at Static Pumping*, *JETP Lett.* **106**, 659 (2017)].
17. I. Kolokolov and V. Lebedev, *Phys. Rev. E* **102**, 023108 (2020).
18. A. N. Doludenko, S. V. Fortova, I. V. Kolokolov, and V. V. Lebedev, *Ann. Phys.* **447**, 169072 (2022).
19. M. Souzy, I. Zaier, H. Lhuissier, T. Le Borgne, and B. Metzger, *Mixing Lamellae in a Shear Flow*, *J. Fluid Mech.* **838**, R3 (2018).
20. H. W. Wyld, *Ann. Phys.* **14**, 143 (1961).
21. P. C. Martin, E. D. Siggia, and H. A. Rose, *Phys. Rev. A* **8**, 423 (1973).
22. J. Hertz, Y. Roudi, and P. Sollich, *J. Phys. A* **50**, 033001 (2017).
23. G. C. Wick, *The Evaluation of the Collision Matrix*, *Phys. Rev.* **80**, 268 (1950).
24. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. I (Foundations), Cambridge University Press, Cambridge, U. K. (1995).
25. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, М. М. Тумасова, *ЖЭТФ* **163**, 881 (2023) [I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and M. M. Tumakova, *JETP* **136**, 785 (2023)].
26. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, М. М. Тумасова, *Письма в ЖЭТФ* **117**, 127 (2023) [I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and M. M. Tumakova, *JETP Lett.* **117**, 122 (2023)].
27. R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **8**, 575 (1965).
28. В. И. Белиничер, В. С. Львов, *ЖЭТФ* **93**, 533 (1987) [V. I. Belinicher and V. S. L'vov, *Sov. Phys. JETP* **66**, 303 (1987)].
29. E. Deusebio, G. Boffetta, E. Lindborg, and S. Musacchio, *Phys. Rev. E* **90**, 023005 (2014).
30. I. V. Kolokolov, L. L. Ogorodnikov, and S. S. Vergeles, *Phys. Rev. Fluids*, **5**, 034604 (2020).